Apunts d'Anàlisi Matemàtica

Notes del curs de tardor de 2017

Índex

Introducció

Aquestes notes estan basades en les classes magistrals dels professors María J. Carro Rossell (Teoria), Konstantin Dyakonov (Problemes), Carme Cascante Canut (Problemes), i Carlos Arturo Cruz Rodríguez (Problemes). Tanmateix, cal dir que una varietat d'idees prové dels apunts del Sogol Thamaem (Drive) i, evidentment, de la bibliografia utilitzada.

L'objectiu principal de l'assignatura és l'estudi de successions i sèries de funcions (capítol 3), especialment de sèries de potències (capítol 4). Per fer-ho, però, haurem de passar per la definició i construcció de $\mathbb{R}$ (capítol 1) i per una introducció a espais mètrics on parlarem de continuïtat, límits, compacitat, etc. (capítol 2). Aquests apunts consten, doncs, de quatre capítols teòrics i d'una sèrie d'exercicis resolts extrets de les llistes del curs de tardor de 2017.

Tingueu en compte que si decidiu recórrer a aquestes notes, trobareu errors que se m'hauran escapat. Intentaré, però, revisar-les periòdicament i anar corregint-les. En qualsevol cas, agraeixo tota suggerència, crítica o correcció i, per això, deixo penjada al Drive la carpeta amb tots els arxius de LaTeXper si voleu fer els canvis vosaltres mateixos.

En fi, no m'entretinc més amb aquests aspectes i espero que això us sigui útil.

Alejandro García Rivas
Darrera actualització: 12 de desembre de 2018

Capítol 1

Els nombres reals

A l'assignatura de *Llenguatge i Raonament Matemàtic* es va introduir el conjunt dels nombres naturals, $\mathbb{N}$. De seguida, però, es van detectar insuficiències per a aquest conjunt, ja que, com ens demana la intuïció, seria interessant que fos un anell commutatiu, és a dir, que poguéssim "restar". Això porta a la construcció del conjunt dels nombres enters, $\mathbb{Z}$. Les operacions de $\mathbb{N}$ es poden estendre a $\mathbb{Z}$ de tal manera que aquest últim tingui estructura d'anell commutatiu. També es té que l'ordre de $\mathbb{N}$ permet definir una relació d'ordre total a $\mathbb{Z}$.

No obstant, $\mathbb{Z}$ no és un cos commutatiu (cf. Definició 1.1.1), per tant, ens podríem preguntar com podem estendre $\mathbb{Z}$ per obtenir un cos commutatiu de manera que aquest sigui el més petit que contingui $\mathbb{Z}$. Aquesta qüestió ja es va resoldre a l'assignatura d'*Estructures Algebraiques* de forma més general: donat un domini d'integritat qualsevol, el cos commutatiu més petit que el conté és el seu cos de fraccions. Arribats a aquest punt, definim el conjunt dels nombres racionals, $\mathbb{Q}$, com el cos de fraccions de $\mathbb{Z}$. A més a més, la relació d'ordre total a $\mathbb{Z}$ s'estén a $\mathbb{Q}$.

Ara bé, de nou és senzill trobar insuficiències per a $\mathbb{Q}$. Ens interessaria quantificar distàncies (però $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), que es compleixi l'axioma del suprem, que les successions convergents segons Cauchy tinguin límit en el mateix conjunt en què estan definides, que les funcions contínues compleixin el Teorema de Bolzano, etc. Aquestes carències de $\mathbb{Q}$ són les que porten a la definició del conjunt dels nombres reals, que explicarem en aquest primer capítol.

Assumirem, però, que els conceptes relatius a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ ja són coneguts i no els repassarem en més detall en aquests apunts.[1]

Les següents quatre seccions estan dedicades a explicar els conceptes necessaris per formular la definició d'un cos de nombres reals.

1.1 Cossos commutatius

Definició 1.1.1. Siguin $\mathbb{K} \neq \varnothing$ un conjunt, $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ i $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dues aplicacions (denotarem $+(x, y) \coloneqq x + y$ i $\cdot(x, y) \coloneqq x \cdot y = xy$, per a $x, y \in \mathbb{K}$). Aleshores direm que $\mathbb{K}$ és un *cos commutatiu amb les operacions* $+$ *i* $\cdot$, si es compleixen:

(a1) Propietat associativa de la suma: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ és $x + (y + z) = (x + y) + z$

(a2) Propietat commutativa de la suma: $\forall x, y \in \mathbb{K}$ és $x + y = y + x$

(a3) Existència d'element neutre per $+$: $\exists 0 \in \mathbb{K}$ tal que $\forall x \in \mathbb{K}$ és $x + 0 = 0 + x = x$

(a4) Existència d'element invers per $+$ (o element oposat): $\forall x \in \mathbb{K}$ $\exists y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = 0$

[1] Per si us interessa, podeu consultar https://www.math.wustl.edu/~kumar/courses/310-2011/Peano.pdf o [Ross, pàg. 1], entre d'altres

(a5) Propietat associativa del producte: $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ és $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(a6) Propietat commutativa del producte: $\forall x, y \in \mathbb{K}$ és $x \cdot y = y \cdot x$

(a7) Existència d'element neutre pel producte: $\exists 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\forall x \in \mathbb{K}$ és $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

(a8) Existència d'element invers pel producte: $\forall x \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ $\exists y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = 1$

(a9) Propietat distributiva del producte respecte la suma:
$\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ és $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Com ja és habitual, a partir d'aquestes propietats se'n dedueixen les que esperem que tenen tots els cossos commutatius, les quals es resumeixen en el resultat següent[2]:

Proposició 1.1.2. *Sigui $\mathbb{K}$ un cos commutatiu amb les operacions $+$ i $\cdot$ [3], aleshores es compleix:*

(a) *L'element neutre per la suma és únic.*

(b) *L'element neutre pel producte és únic.*

(c) $\forall x \in \mathbb{K}$ *l'element oposat de x és únic. Denotarem per $-x$ a aquest element i escriurem $y - x$ per referir-nos a $y + (-x)$*

(d) $\forall x \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ *l'element invers de x és únic. Denotarem per x^{-1} a aquest element i escriurem $y/x = \frac{y}{x}$ per referir-nos a $y \cdot x^{-1}$*

(e) $0 = -0$ *i* $1^{-1} = 1$

(f) $\forall x \in \mathbb{K}$ *és* $-(-x) = x$

(g) $\forall x \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ *és* $(x^{-1})^{-1} = x$

(h) $\forall x \in \mathbb{K}$ *és* $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

(i) $\forall x \in \mathbb{K}$ *és* $-x = (-1) \cdot x$

(j) $\forall x, y \in \mathbb{K}$ *és* $-(x + y) = (-x) + (-y)$

(k) $\forall x, y \in \mathbb{K}$ *és* $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$

(l) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$, *si* $x + y = x + z$, *aleshores* $y = z$

(m) $\forall x \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ *i* $\forall y, z \in \mathbb{K}$, *si* $x \cdot y = x \cdot z$, *aleshores* $y = z$.

(n) $\forall x, y \in \mathbb{K}$, *si* $x \cdot y = 0$, *aleshores* $x = 0$ *o bé* $y = 0$.

Demostració. Indicarem amb $(a1), (a2), (a3), \ldots, (a9)$ les propietats de la Definició 1.1.1 utilitzades.

(a) Suposem que 0 i $0'$ són elements neutres per la suma. Aleshores $0 + 0' \overset{(a3)}{=} 0'$, perquè 0 és element neutre per la suma, però també $0 + 0' \overset{(a3)}{=} 0$, perquè $0'$ és element neutre per la suma. En definitiva, $0 = 0'$.

[2] Hi ha moltes altres propietats que s'haurien de provar. No obstant, les anirem veient sobre la marxa quan les necessitem per demostrar resultats més rellevants

[3] A partir d'ara direm només "sigui $\mathbb{K}$ un cos commutatiu", sense especificar que les operacions són $+$ i $\cdot$

(b) Anàlogament, si 1 i $1'$ són elements neutres pel producte, aleshores $1 \overset{(a7)}{=} 1 \cdot 1' \overset{(a7)}{=} 1'$.

(c) Suposem que y i y' són elements oposats de x. Aleshores $y \overset{(a3)}{=} y + 0 \overset{(a4)}{=} y + (x + y') \overset{(a1)}{=} (y + x) + y' \overset{(a4)}{=} 0 + y' \overset{(a3)}{=} y'$

(d) Suposem que y i y' són elements inversos de x. Aleshores $y \overset{(a7)}{=} y \cdot 1 \overset{(a8)}{=} y \cdot (x \cdot y') \overset{(a5)}{=} (y \cdot x) \cdot y' \overset{(a8)}{=} 1 \cdot y' \overset{(a7)}{=} y'$

(e) Immediat de les igualtats $0 + 0 \overset{(a3)}{=} 0$ i $1 \cdot 1 \overset{(a7)}{=} 1$

(f) De les igualtats $(-x) + x = x + (-x) \overset{(a3)}{=} 0$ es dedueix que x és l'oposat de $-x$, és a dir, que $x = -(-x)$.

(g) De les igualtats $x^{-1}x = xx^{-1} \overset{(a8)}{=} 1$ es dedueix que x és l'invers de x^{-1}, és a dir, que $x = (x^{-1})^{-1}$.

(h) $0 \overset{(a3)}{=} 0 + 0 \Rightarrow x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 \overset{(a9)}{\Rightarrow} x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 \overset{(a4)}{\Rightarrow} ((x \cdot 0) + (x \cdot 0)) - (x \cdot 0) = (x \cdot 0) - (x \cdot 0) \overset{(a1),(a4)}{\Longrightarrow} x \cdot 0 + 0 = 0 \overset{(a3)}{\Rightarrow} x \cdot 0 = 0$

(i) $x + (-1) \cdot x \overset{(a2)}{=} (-1) \cdot x + x \overset{(a7)}{=} (-1) \cdot x + 1 \cdot x \overset{(a9)}{=} (-1 + 1) \cdot x \overset{(h)}{=} 0$

(j) $-(x + y) \overset{(i)}{=} (-1) \cdot (x + y) \overset{(a9)}{=} (-1) \cdot x + (-1) \cdot y \overset{(i)}{=} (-x) + (-y)$

(k) $(xy) \cdot (x^{-1}y^{-1}) \overset{(a6)}{=} (x^{-1}y^{-1}) \cdot (xy) \overset{(a6)}{=} (x^{-1}y^{-1}) \cdot (yx) \overset{(a5)}{=} x^{-1}((y^{-1}y) \cdot x) \overset{(a8)}{=} x^{-1} \cdot (1 \cdot x) \overset{(a7)}{=} x^{-1} \cdot x \overset{(a7)}{=} 1$

(l) $x + y = x + z \Rightarrow (-x) + (x + y) = (-x) + (x + z) \overset{(a1),(a4)}{\Longrightarrow} 0 + y = 0 + z \overset{(a3)}{\Rightarrow} y = z$

(m) $xy = xz \Rightarrow x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz) \overset{(a5),(a8)}{\Longrightarrow} 1 \cdot y = 1 \cdot z \overset{(a7)}{\Rightarrow} y = z$

(n) Si $x \cdot y = 0$ i $x \neq 0$, observem que per (h) podem escriure $x \cdot y = x \cdot 0$. Ara, aplicant (m), tenim $y = 0$.

□

1.2 Cossos commutatius totalment ordenats

Recordem primer algunes definicions bàsiques de *LiRM*.

Definició 1.2.1. Donats conjunts A, B, *una relació a A i B* és un subconjunt de $A \times B$. Si $A = B$, una relació a A i B s'anomena simplement relació a A. Si $R \subseteq A \times B$ (i.e. R és relació a A i B), aleshores s'acostuma a escriure aRb per referir-se a $(a, b) \in R$.

Definició 1.2.2. Sigui $A \neq \varnothing$. Una relació a A, R, s'anomena *relació d'ordre* si compleix les següents propietats:

(b1) Reflexiva: $\forall x \in A$ és xRx.

(b2) Antisimètrica: $\forall x, y \in A$, si xRy i yRx, aleshores $x = y$.

(b3) Transitiva: $\forall x, y, z \in A$, si xRy i yRz, aleshores xRz.

A més a més, diem que R és una *relació d'ordre total* si és d'ordre i compleix:

(b4) $\forall x, y \in A$ és xRy o bé yRx.

Els símbols utilitzats per referir-se a relacions d'ordre acostumen a ser del tipus $\leq, \preceq, \leqslant, \leqq, \lesssim, \lessapprox, \preccurlyeq, \trianglelefteq$, etc. Aquesta simbologia permet utilitzar la notació $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$.

Definició 1.2.3. Sigui $A \neq \varnothing$. Una relació a A, R, s'anomena *relació d'ordre estricte* si compleix les següents propietats:

(B1) Irreflexiva: $\forall x \in A$ és $x \not R x$.

(B2) Transitiva: $\forall x, y, z \in A$, si xRy i yRz, aleshores xRz.

Els símbols utilitzats per referir-se a relacions d'ordre estricte acostumen a ser del tipus $<, \triangleleft, \prec$, etc. Aquesta simbologia permet utilitzar la notació $x > y \Leftrightarrow y < x$.

Observació 1.2.4. Si $\leq$ és una relació d'ordre, aleshores la relació $<$ definida per

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ i } x \neq y$$

és d'ordre estricte. En general, si s'ha mencionat $\leq$, s'entén que $<$ és la relació d'ordre estricte associada a $\leq$ en aquest sentit.

Recíprocament, si $<$ és una relació d'ordre estricte, aleshores la relació $\leq$ definida per

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ o bé } x = y$$

és d'ordre. En general, si s'ha mencionat $<$, s'entén que $\leq$ és la relació d'ordre associada a $<$ en aquest sentit.

Definició 1.2.5. Un cos commutatiu totalment ordenat (CCTO per abreviar) és un parell $(\mathbb{K}, \leq)$, on $\mathbb{K}$ és un cos commutatiu i $\leq$ és una relació d'ordre total sobre $\mathbb{K}$ i es compleixen:

(b5) $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ tals que $x \leq y$, aleshores $x + z \leq y + z$.

(b6) $\forall x, y \in \mathbb{K}$ tals que si $0 \leq x$ i $0 \leq y$, aleshores $0 \leq x \cdot y$.

Per simplificar l'escriptura, quan diguem que $\mathbb{K}$ és un CCTO, s'entendrà que ho és amb la relació denotada per $\leq$. A més a més, en el sentit de l'Observació 1.2.4 s'anomenen *elements positius* als $x \in \mathbb{K}$ tals que $x > 0$ i *elements negatius* als que $x < 0$. També es defineixen, per a $a \in \mathbb{K}$ i $R =\leq, \geq, <, >$: $\mathbb{K}_{Ra} := \{x \in \mathbb{K} : xRa\}$.

A continuació mostrem com les noves propietats (b1),...,(b6) són suficients per demostrar els resultats que esperem que tinguin tots els CCTO, com per exemple $\mathbb{Q}$.

Proposició 1.2.6. *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO i $x, y, u, v \in \mathbb{K}$ tals que $x \leq y$ i $u \leq v$ (resp. $x < y$ i $u \leq v$), aleshores $x + u \leq y + v$ (resp. $x + u < y + v$).*

Demostració.

$$\left. \begin{array}{l} x \leq y \overset{(b5)}{\Rightarrow} x + u \leq y + u \\ u \leq v \overset{(b5)}{\Rightarrow} u + y \leq v + y \overset{(a2)}{\Rightarrow} y + u \leq y + v \end{array} \right\} \overset{(b3)}{\Rightarrow} x + u \leq y + v$$

La part amb $<$ es fa pràcticament igual. $\square$

Proposició 1.2.7. *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO i $x, y \in \mathbb{K}$, aleshores:*

(a) *x és positiu si, i només si, $-x$ és negatiu.*

(b) *x és negatiu si, i només si, $-x$ és positiu.*

(c) *Si $x \leq 0$ i $y \geq 0$ (resp. $x < 0$ i $y > 0$), aleshores $x \cdot y \leq 0$ (resp. $x \cdot y < 0$).*

(d) *Si $x, y \leq 0$ (resp. $x, y < 0$), aleshores $x \cdot y \geq 0$ (resp. $x \cdot y > 0$).*

Demostració. (a) Si $x > 0$, aleshores $0 = x + (-x) > -x$ (on hem utilitzat la Proposició 1.2.6 amb $u = v = -x$). Recíprocament, si $-x < 0$, aleshores $0 = (-x) + x < x$ (on hem utilitzat la mateixa proposició amb $u = v = x$).

(b) Immediat utilitzant que $x = -(-x)$ i aplicant l'apartat (a).

(c) Els casos $x = 0$ i $y = 0$ són trivials. Suposem, per tant, que $x, y \neq 0$. Per l'apartat (b), $-x > 0$, i per la propietat (b6), $(-x)y > 0$. Ara bé, $(-x)y + xy = (-x + x)y = 0 \cdot y = 0$, i.e. $(-x)y = -(xy)$. En definitiva, com que $-(xy) > 0$, l'apartat (b) ens dona el resultat.

(d) Els casos $x = 0$ i $y = 0$ són trivials. Suposem, per tant, que $x, y \neq 0$. Per l'apartat (b), $-x > 0$ i $-y > 0$, i per la propietat (b6), $(-x)(-y) > 0$. És suficient veure que $(-x)(-y) = xy$. A l'anterior apartat ja hem vist $(-x)y = -(xy)$. Per tant, $(-x)(-y) + (-(xy)) = (-x)(-y) + (-x)y = (-x)(-y + y) = -x \cdot 0 = 0$, és a dir, $(-x)(-y) = -(-(xy)) = xy$, on hem utilitzat diverses propietats de la Definició 1.1.1 i de la Proposició 1.1.2.

$\square$

Corol·lari 1.2.8. *Siguin $x, y, z \in \mathbb{K}$ tals que $x \leq y$ i $z > 0$ (resp. $z < 0$), aleshores $xz \leq yz$ (resp. $xz \geq yz$).*

Demostració. $x \leq y \overset{(b5)}{\Rightarrow} y - x \geq 0 \overset{1.2.7}{\Longrightarrow} (y - x)z \geq 0$ (resp. $(y - x)z \leq 0$) $\overset{(a9),(b5)}{\Longrightarrow} xz \leq yz$ (resp. $xz \geq yz$). $\square$

Observació 1.2.9. Notem que les propietats (b1),...,(b6) imposen que cossos com $\mathbb{C}$ no puguin ser CCTO, ja que $0 < 1^2 = 1$ i $0 < i^2 = -1$, és a dir, $1 < 0 < 1$, la qual cosa contradiu (B1).

Definició 1.2.10. Sigui $\mathbb{K}$ un CCTO, definim l'aplicació *valor absolut*, $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{K}_{\geq 0}$, per l'assignació:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposició 1.2.11. *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO i $x, y \in \mathbb{K}$, aleshores:*

(a) *$|x| = 0$ si, i només si, $x = 0$.*

(b) $|xy| = |x||y|$

(c) *$|x| \leq y$ si, i només si, $-y \leq x \leq y$*

(d) *$|x| \geq y$ si, i només si, $x \geq y$ o bé $x \leq -y$.*

(e) *(Desigualtat triangular) $|x + y| \leq |x| + |y|$*

Demostració. La (a) és evident. La (b) es fa senzillament per casos i aplicant els resultats vists a la demostració de la Proposició 1.2.7. Per la (c):

$$|x| \leq y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq y \\ -x \leq y \Leftrightarrow x \geq -y \end{array} \right\} \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$$

La (d) també surt fàcilment de forma semblant. Per la (e), és suficient veure que $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$, la qual cosa es dedueix de $-|x| \leq x \leq |x|$, $-|y| \leq y \leq |y|$ i de la Proposició 1.2.6. □

Exercicis

Als exercicis següents $\mathbb{K}$ serà un CCTO.

1.1. Siguin $x, y \in \mathbb{K}$. Demostreu que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

1.2. Siguin $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. Demostreu que $|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$

1.3 Arquimedianeïtat

En aquest apartat veurem la tercera gran propietat que li exigirem als cossos de nombres reals. Aquesta consisteix, intuïtivament, a imposar que aquest conjunt no sigui "molt gran". Aquesta definició és un primer intent d'apropament a aquesta idea.

Definició 1.3.1 (Preliminar)**.** Sigui $\mathbb{K}$ un CCTO. Diem que $\mathbb{K}$ és arquimedià si el conjunt dels nombres naturals no hi està acotat, és a dir, si $\forall x \in \mathbb{K}\ \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

Notem que el que estem intentant dir és que en un CCTO arquimedià no hi ha cap element que pugui considerar-se major que qualsevol natural. No obstant, ja haureu notat que a aquesta definició li falten alguns detalls. Podem començar, per exemple, aclarint què s'entén per conjunt acotat (definim, de pas, alguns conceptes més).

Definició 1.3.2. Siguin A un conjunt ordenat per $\leq$, $B \subseteq A$ i $a \in A$. Diem que a és *cota superior* (resp. *cota inferior*) de B si $x \leq a\ \forall x \in B$ (resp. $a \leq x\ \forall x \in B$).
Diem que B és un conjunt *acotat superiorment* (resp. *inferiorment*) si existeix alguna cota superior (resp. inferior) de B. Diem que B és *acotat* si ho és inferiorment i superiorment.
Si a és una cota superior (resp. inferior) de B i pertany a B, aleshores diem que que b és màxim (resp. mínim).
Finalment, si existeix un mínim (resp. màxim) del conjunt de totes les cotes superiors (resp. inferiors) de B, se l'anomena *suprem de B* (resp. *ínfim de B*).

Però encara podem trobar altres imprecisions a la Definició 1.3.1. Per exemple, com s'entén que $\mathbb{N}$ sigui acotat a $\mathbb{K}$? O quin sentit té $x < n$ si $x \in \mathbb{K}$ i $n \in \mathbb{N}$?

La resposta a aquestes preguntes passa per veure que tot CCTO conté una còpia molt concreta de $\mathbb{N}$, és a dir, que podem definir una determinada aplicació injectiva $\varphi : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{K}$. Llavors, que $\mathbb{N}$ sigui acotat a $\mathbb{K}$ voldrà dir, simplement, que $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{K}$ és acotat a $\mathbb{K}$ i quan escrivim $x < n$ ens referirem a $x < \varphi(n)$.

Definirem $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ per les assignacions

$$\phi(n) := \begin{cases} 1 + \overset{n}{\ldots} + 1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ (-1) + \overset{-n}{\ldots} + (-1) & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Els detalls que falten a la demostració del següent resultat ja es van veure a *Estructures Algebraiques*. En qualsevol cas, són senzilles comprovacions.

Teorema 1.3.3. *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO i ϕ l'aplicació definida anteriorment. Aleshores ϕ és l'únic morfisme d'anells de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{K}$ i, a més a més, és monòton creixent i injectiu. Podem pensar, per tant, que $\mathbb{K}$ conté una còpia de l'estructura d'anell de $\mathbb{Z}$ i que l'ordre de $\mathbb{K}$ és una extensió del de $\mathbb{Z}$.*

Demostració. Veiem primer la unicitat. Suposem que $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ és un morfisme d'anells. Llavors $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$ i donat $n \in \mathbb{Z}$ positiu, tenim $\psi(n) = \psi(1 + \overset{n}{\ldots} + 1) = \psi(1) + \overset{n}{\ldots} + \psi(1) = 1 + \overset{n}{\ldots} + 1$. El cas $n < 0$ es fa anàlogament. Per tant, $\psi = \phi$, la qual cosa demostra la unicitat.
Veiem ara la resta de propietats:

- ϕ morfisme d'anells no és complicat de veure. Es pot fer, per exemple, per casos. Recordem que el que s'ha de mostrar és que $\phi(1) = 1$, $\phi(n + m) = \phi(n) + \phi(m)$ i $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

- Per la monotonia creixent notem primer que a $\mathbb{K}$ és $0 < 1$, ja que $0 \neq 1$ i si fos $1 < 0$, aleshores $1 = 1 \cdot 1 > 0$ (cf. Proposició 1.2.7), és a dir, $1 < 0 < 1 \overset{(B2)}{\Rightarrow} 1 < 1$, la qual cosa contradiu (B1). Utilitzant reiteradament la Proposició 1.2.6, obtenim que $1 + \overset{n}{\ldots} + 1 > 0$ a $\mathbb{K}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Per tant, donats $n, m \in \mathbb{Z}$ amb $n < m$, aleshores $m - n > 0$ i $\phi(m) - \phi(n) = \phi(m - n) = 1 + \overset{m-n}{\ldots} + 1 > 0$, és a dir, $\phi(m) > \phi(n)$, com volíem veure.

- Per veure que ϕ és injectiva és suficient provar que $\ker \phi = \{0\}$. Suposem que $n \in \ker \phi$ i $n \neq 0$. Llavors és $n > 0$ o bé $n < 0$. Si es donés el primer cas, aleshores $1 + \overset{n}{\ldots} + 1 = 0$, però abans hem vist que $1 + \overset{n}{\ldots} + 1 > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, contradicció. Si es donés el segon cas, llavors $(-1) + \overset{-n}{\ldots} + (-1) = (-1) \cdot (1 + \overset{-n}{\ldots} + 1) = 0$, és a dir, $1 + \overset{-n}{\ldots} + 1 = 0$ amb $-n \in \mathbb{N}$, i.e. tornem a tenir una contradicció. En definitiva, no pot ser $\ker \phi \neq \{0\}$

□

Direm que $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ és el morfisme característic de $\mathbb{K}$. Tenint en compte tots aquests comentaris, ja podem formular completament la definició d'arquimedianeïtat:

Definició 1.3.4. Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO i $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ el seu morfisme característic. Diem que $\mathbb{K}$ és arquimedià, si $\phi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{K}$ no és acotat, és a dir, si $\forall x \in \mathbb{K}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x < \phi(n)$.

Observació 1.3.5. Veiem alguns exemples:

- $\mathbb{Q}$ és arquimedià, ja que el morfisme característic de $\mathbb{Q}$ ve definit per les assignacions $\phi(n) = \frac{n}{1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ i donat $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, si $\frac{a}{b} < 0$, podem prendre $n := 0$ i en cas contrari podem suposar que $a, b \geq 0$ i tenim $a + 1 \in \mathbb{N}$ i $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{1}$.

- Recordem que l'arquimedianeïtat imposava d'alguna manera que el cos no fos "molt gran". Això es pot posar de manifest amb el següent exemple. Sigui $\mathbb{Q}(x)$ el cos de fraccions de l'anell de polinomis $\mathbb{Q}[x]$, i.e.,

$$\mathbb{Q}(x) = \left\{ \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} : a_j, b_k \in \mathbb{Q}, b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0 \neq 0 \right\}$$

  Definim la següent relació d'ordre total a $\mathbb{Q}(x)$:

$$P \leq Q \Leftrightarrow Q - P = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} \text{ amb } a_n, b_m \geq 0$$

  Es pot comprovar que se satisfan tots els axiomes de CCTO. Però notem que $\mathbb{Q}(x)$ no és arquimedià, ja que $\forall n \in \mathbb{N}$ és $\frac{x-n}{1} > 0$, per tant, $\frac{x}{1} > \frac{n}{1} = \phi(n)$.

Si bé l'aquimedianeïtat "acota"els CCTO per tal que no siguin tan "grans", observem que ja hem obtingut pel camí una acotació inferior. En efecte, el Teorema 1.3.3 afirma que si $\mathbb{K}$ és un CCTO, aleshores $\mathbb{K}$ conté una còpia de l'estructura i de l'ordre de $\mathbb{Z}$. Però encara podem fer-ho millor:

Teorema 1.3.6. *Sigui $\mathbb{K}$ un CCTO. Aleshores existeix un únic morfisme de cossos $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$. A més a més, Φ és injectiu i monòton creixent. Podem pensar, per tant, que $\mathbb{K}$ conté una còpia de l'estructura i de l'ordre de $\mathbb{Q}$.*

Demostració. Veiem primer la unicitat. Suposem que $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ és un morfisme de cossos. Com que $\Phi(1) = 1$, tenim que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ és $\Phi(n) = \Phi(1 + \overset{n}{\cdots} + 1) = \Phi(1) + \overset{n}{\cdots} + \Phi(1) = 1 + \overset{n}{\cdots} + 1$. D'altra banda, $\forall n \in \mathbb{Z}, n < 0$ és $\Phi(n) = -\Phi(-n) = -\Phi(1 + \overset{n}{\cdots} + 1) = -\Phi(1) - \overset{n}{\cdots} - \Phi(1) = (-1) + \overset{n}{\cdots} + (-1)$, és a dir, $\Phi_{|\mathbb{Z}} = \phi$ és el morfisme característic de $\mathbb{K}$. Observem també que $\forall m \in \mathbb{Z}$ és $\Phi(\frac{1}{m}) = \Phi(\frac{m}{1})^{-1} = \phi(m)^{-1}$. Per tant, $\Phi(\frac{n}{m}) = \Phi(\frac{n}{1})\Phi(\frac{1}{m}) = \phi(n)\phi(m)^{-1}$, és a dir, Φ queda totalment determinat.

Per l'existència definim $\Phi(\frac{n}{m}) = \phi(n)\phi(m)^{-1}$ i comprovem que se satisfan les propietats demanades:

- Φ està ben definida: suposem que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Aleshores $ad = bc$, és a dir, $\phi(ad) = \phi(bc)$, per tant, $\phi(a)\phi(b)^{-1} = \phi(c)\phi(d)^{-1}$, i.e., $\Phi\left(\frac{a}{b}\right) = \Phi\left(\frac{c}{d}\right)$
- Φ és morfisme de cossos:
  1. $\Phi\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \Phi\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = \phi(ad+bc)\phi(bd)^{-1} = \phi(a)\phi(b)^{-1} + \phi(c)\phi(d)^{-1} = \Phi\left(\frac{a}{b}\right) + \Phi\left(\frac{c}{d}\right)$
  2. $\Phi\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \Phi\left(\frac{ac}{bd}\right) = \phi(ac)\phi(bd)^{-1} = \phi(a)\phi(b)^{-1} \cdot \phi(c)\phi(d)^{-1} = \Phi\left(\frac{a}{b}\right)\Phi\left(\frac{c}{d}\right)$
- Φ és monòtona creixent: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, b, d > 0 \Rightarrow ad < bc$ i com que ϕ és monòtona (cf. Teorema 1.3.3), tenim $\phi(ad) < \phi(bc) \overset{1.2.8}{\Longrightarrow} \phi(a)\phi(b)^{-1} < \phi(c)\phi(d)^{-1} \Rightarrow \Phi\left(\frac{a}{b}\right) < \Phi\left(\frac{c}{d}\right)$
- Finalment, Φ és injectiva perquè és un morfisme de cossos i no és l'aplicació nul·la.

$\square$

Exercicis

Als exercicis següents $\mathbb{K}$ serà un CCTO.

1.3. Siguin $x, y \in \mathbb{K}$ amb $0 < y < x$. Tenint en compte les inclusions naturals $\mathbb{N}, \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$, demostreu que per a tot $n \geq 1$ és

$$\frac{n+1}{n}y < \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x^n - y^n} < \frac{n+1}{n}x$$

1.4. Sigui $A \subseteq \mathbb{K}$, demostreu que si A té mínim, aquest és únic i que si té màxim aquest és únic. Deduïu l'anàleg per a ínfim i suprem. Denotarem per $\sup A$ al suprem de A (si existeix) i $\inf A$ a l'ínfim de A (si existeix).

1.5. Siguin $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{K}$ i $\alpha \in \mathbb{K}$. Demostreu que α és l'ínfim de A si, i només si, es compleix:

(1) α és cota inferior de A.

(2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}\ \exists x \in A$ tal que $\alpha \leq x < \alpha + \varepsilon$

Enuncieu i proveu el resultat anàleg per al suprem.

1.6. Siguin $A, B \subseteq \mathbb{K}$ i $C := \{x + y \in \mathbb{K} : x \in A, y \in B\}$. Demostreu que:

(a) Si A té suprem, aleshores $-A := \{-a : a \in A\}$ té ínfim i $\inf(-A) = -\sup A$.

(b) Si A té ínfim, aleshores $-A := \{-a : a \in A\}$ té suprem i $\sup(-A) = -\inf A$.

(c) Si A i B tenen ínfim, aleshores C també i $\inf C = \inf A + \inf B$.

(d) Si A i B tenen suprem, aleshores C també i $\sup C = \sup A + \sup B$.

(e) Si $\lambda \in \mathbb{K}_{>0}$, $A_\lambda := \{\lambda \cdot x : x \in A\}$ i A té suprem, aleshores A_λ també en té i $\sup A_\lambda = \lambda \cdot \sup A$.

1.4 Completesa per successions

En aquesta secció ens dedicarem a explicar la quarta i última propietat que li exigirem als conjunts dels nombres reals i, ja que estem, donarem algunes definicions i resultats bàsics sobre successions.

Definició 1.4.1. Sigui $A \neq \varnothing$ un conjunt. Una *successió d'elements de* A (o *successió de* A) és una aplicació $\mathbb{N} \xrightarrow{\varphi} A$. Posant $a_n = \varphi(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, utilitzarem la notació habitual $(a_n)_n$ per referir-nos a la successió φ. Anomenarem elements de $(a_n)_n$ als elements de $\operatorname{im}\varphi$ i donat $B \subseteq A$, posarem $(a_n)_n \subseteq B$ si $\operatorname{im}\varphi \subseteq B$.

Definició 1.4.2. Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO, $(a_n)_n$ una successió d'elements de $\mathbb{K}$ i $l \in \mathbb{K}$. Diem que $(a_n)_n$ *convergeix cap a* l o *té límit* l si, i només si,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} \text{ és } |a_n - l| < \varepsilon$$

En aquest cas, escrivim $l = \lim a_n$, $l = \lim\limits_n a_n$, $a_n \xrightarrow{n} l$ o bé $(a_n)_n \xrightarrow{n} l$. A més a més, direm que $(a_n)_n$ *convergeix* o *té límit* si existeix $a \in \mathbb{K}$ tal que $(a_n)_n$ convergeix cap a a.

Observació 1.4.3. Potser val la pena entretenir-se una estona a comentar aquesta definició. Pensem-la en un cos senzill i intuïtiu, per exemple $\mathbb{Q}$. Suposem que $(a_n)_n$ és una successió d'elements de $\mathbb{Q}$ que convergeix cap a l. Això vol dir que si triem un racional $\varepsilon > 0$ tan proper a 0 com vulguem, sempre podrem trobar un natural n_0 a partir del qual tots els elements de la successió estiguin entre $l - \varepsilon$ i $l + \varepsilon$. Per tant, com que ε el podem prendre tan petit com desitgem, podem pensar que els elements de $(a_n)_n$ s'apropen a l.
Potser també convé escriure el contrari de la Definició 1.4.2:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{K}_{>0} \text{ tal que } \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0, n \in \mathbb{N} \text{ complint } |a_n - l| \geq \varepsilon$$

Trigarem una estona a veure aplicacions de les següents dues definicions (a partir de l'exercici **1.11.**), però convé posar-les a prop de les anteriors.

Definició 1.4.4. Siguin $A \neq \varnothing$ un conjunt i $\varphi : \mathbb{N} \to A$ una successió d'elements de A. Una successió parcial de φ és una aplicació de la forma $\varphi \circ \theta : \mathbb{N} \longrightarrow A$, on $\theta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ és una aplicació estrictament creixent.
Utilitzant la notació habitual $\varphi = (a_n)_n$, podem dir que una parcial de $(a_n)_n$ és una successió de la forma $(a_{n_k})_k$, on $(n_k)_k$ és una successió de $\mathbb{N}$ estrictament creixent.
Escriurem $(b_n)_n \vdash (a_n)_n$ per indicar que $(b_n)_n$ és una successió parcial de $(a_n)_n$.

Definició 1.4.5. Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO i $(a_n)_n$ una successió d'elements de $\mathbb{K}$. Diem que $(a_n)_n$ *té límit* $\pm\infty$ si, i només si,

$$\forall M \in \mathbb{K}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} \text{ és } \pm a_n > M, \text{ respectivament}$$

En aquest cas, escrivim $\lim a_n = \pm\infty$, $\lim\limits_n a_n = \pm\infty$, $a_n \xrightarrow{n} \pm\infty$ o bé $(a_n)_n \xrightarrow{n} \pm\infty$.

El següent lema l'utilitzarem en certes ocasions.

Lema 1.4.6. *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO i $a, C \in \mathbb{K}$, $C > 0$ tals que $\forall \varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}$ és $|a| < C \cdot \varepsilon$. Aleshores $a = 0$.*

Demostració. Suposem que $a > 0$. Aleshores s'ha de complir $a < C\varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0$. Triant $\varepsilon := \frac{a}{C} > 0$, hem de tenir $a < C \cdot \frac{a}{C} = a$, contradicció. D'altra banda, si fos $a < 0$ podem raonar de forma semblant. Triem $\varepsilon := \frac{-a}{C} > 0$. Llavors $-a < C \cdot \frac{-a}{C} = -a$, contradicció. Hem provat que $a \leq 0$ i $a \geq 0$, i.e. $a = 0$. [4] □

Teorema 1.4.7. *Sigui $\mathbb{K}$ un CCTO. Si una successió d'elements de $\mathbb{K}$ té límit, aquest és únic.*

Demostració. Suposem que $(a_n)_n$ és una successió d'elements de $\mathbb{K}$ que convergeix cap a $l \in \mathbb{K}$ i a $l' \in \mathbb{K}$. El nostre objectiu és provar que $l = l'$. $\forall \varepsilon > 0$ tenim que existeixen $n_0, n_0' \in \mathbb{N}$ tals que $\forall n \geq n_0$ és $|a_n - l| < \varepsilon$ i $\forall n \geq n_0'$ és $|a_n - l'| < \varepsilon$. Per a $n \geq \max\{n_0, n_0'\} \geq n_0, n_0'$ tindrem

$$|l - l'| = |(l - a_n) + (a_n - l')| \leq |l - a_n| + |a_n - l'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

On hem utilitzat la desigualtat triangular, la Proposició 1.2.6, entre altres. Per tant, tenim $|l - l'| < 2\varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0$. Utilitzant el lema anterior, obtenim $l - l' = 0$, és a dir, $l = l'$, com volíem veure. □

Lema 1.4.8. *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO, $(a_n)_n$ una successió d'elements de $\mathbb{K}$ que convergeix cap a $l \in \mathbb{K}$. Aleshores $\operatorname{im}(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ és acotat, és a dir, existeix $C \in \mathbb{K}$ tal que $|a_n| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$. Direm que la successió $(a_n)_n$ està acotada.*

Demostració. Prenem $\varepsilon = 1$. Per la definició de límit, tenim que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $|a_n - l| < 1$. Per tant, per a $n \geq n_0$ és:

$$|a_n| = |(a_n - l) + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$$

Triant $C := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |l|\}$ s'obté el que volíem. □

El següent lema mostra que la Definició 1.4.2 pot generalitzar-se.

Lema 1.4.9. *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO, $(a_n)_n$ una successió d'elements de $\mathbb{K}$, $C \in \mathbb{K}_{>0}$ i $l \in \mathbb{K}$. Aleshores $a_n \xrightarrow{n} l$ si, i només si, $\forall \varepsilon' \in \mathbb{K}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $|a_n - l| < C\varepsilon'$*

Demostració. $\Rightarrow$: Sigui $\varepsilon' > 0$, com que $b_n \xrightarrow{n} l$, podem aplicar la definició de límit amb $\varepsilon := C \cdot \varepsilon' > 0$
$\Leftarrow$: Sigui $\varepsilon > 0$, apliquem la hipòtesi amb $\varepsilon := C^{-1}\varepsilon' > 0$. □

Proposició 1.4.10. *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO i $(a_n)_n, (b_n)_n$ successions d'elements de $\mathbb{K}$ convergents a a i b, respectivament. Aleshores:*

[4] Observem que s'han omès alguns passos. Per exemple, per què si $a, C > 0$ és $\frac{a}{C} > 0$? També al final de la demostració hem utilitzat (b4) sense explicitar-ho. D'ara endavant ometrem aquest tipus de detalls perquè si no, és per morir-se.

(a) $(a_n + b_n)_n \xrightarrow{n} a + b$

(b) $(a_n \cdot b_n)_n \xrightarrow{n} a \cdot b$

(c) *Si* $\forall n \in \mathbb{N}$ *és* $a_n \neq 0$ *i* $a \neq 0$*, llavors* $(a_n^{-1})_n \xrightarrow{n} a^{-1}$

Demostració. (a) Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores existeixen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tals que $\forall n \geq n_1$ és $|a_n - a| < \varepsilon$ i $\forall n \geq n_2$ és $|b_n - b| < \varepsilon$. Triant $n_0 :=\max\{n_1, n_2\}$ tenim que $\forall n \geq n_0$ és $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$. Aplicant el Lema 1.4.9 amb $C := 2 > 0$ obtenim el resultat.

(b) Pel Lema 1.4.8 tenim que existeix $C > 0$ tal que $|a_n| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$. Per tant, per a tot $n \in \mathbb{N}$ tenim:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = \\ &= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq k|b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned}$$

Sigui ara $\varepsilon > 0$, aleshores hi ha $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tals que $\forall n \geq n_1$ és $|a_n - a| < \varepsilon$ i $\forall n \geq n_2$ és $|b_n - b| < \varepsilon$. Triant $n_0 :=\max\{n_1, n_2\}$ tenim que $\forall n \geq n_0$ és $|a_n b_n - ab| \leq k|b_n - b| + |b||a_n - a| \leq k\varepsilon + |b|\varepsilon = (k + |b|)\varepsilon$. Aplicant el Lema 1.4.9 amb $C := k + |b| > 0$ obtenim el resultat.

(c) Veiem primer que $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \exists C > 0$ tals que $\forall n \geq n_1$ és $|a_n| \geq C$. Per fer-ho podem prendre $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$. Llavors, per la definició de límit, tenim que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$ és $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$. Aleshores $\forall n \geq n_1$ és:

$$|a| = |a_n + (a - a_n)| \leq |a_n| + |a_n - a| < |a_n| + \frac{|a|}{2} \Rightarrow |a_n| > \frac{|a|}{2}$$

Com volíem veure. Ara podem acabar la demostració. Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_2$ és $|a_n - a| < \varepsilon$. Prenem $n_0 :=\max\{n_1, n_2\}$. Llavors $\forall n \geq n_0$ és

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_n|}{|aa_n|} \leq \frac{2}{|a|^2}|a_n - a| < \frac{2}{|a|^2} \cdot \varepsilon$$

Aplicant el Lema 1.4.9 amb $C := \frac{2}{|a|^2} > 0$ obtenim el resultat.

□

Com a casos particulars i conseqüències immediates d'aquesta proposició, cal destacar:

Corol·lari 1.4.11. *Siguin* $\mathbb{K}$ *un CCTO i* $(a_n)_n, (b_n)_n$ *successions d'elements de* $\mathbb{K}$ *convergents a* a *i* b*, respectivament. Aleshores:*

(a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ *és* $(\lambda a_n)_n \xrightarrow{n} \lambda a$

(b) $(-a_n)_n \xrightarrow{n} -a$

(c) $(a_n - b_n)_n \xrightarrow{n} a - b$

(d) $(a_n + b)_n \xrightarrow{n} a + b$

(e) *Si* $\forall n \in \mathbb{N}$ *és* $b_n \neq 0$ *i* $b \neq 0$*, llavors* $(a_n \cdot b_n^{-1})_n \xrightarrow{n} a \cdot b^{-1}$

(f) *Si* $a \neq 0$*, llavors existeixen* $C \in \mathbb{K}_{>0}$ *i* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tals que* $\forall n \geq n_0$ *és* $|a_n| \geq C$*.*

Demostració. (a) Aplicant l'apartat (b) de la proposició anterior amb $b_n := \lambda\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Aplicant l'apartat (a) d'aquest corol·lari amb $\lambda := -1$

(c) Aplicant l'apartat (b) d'aquest corol·lari i l'apartat (a) de l'anterior proposició.

(d) Aplicant l'apartat (a) de l'anterior proposició amb $b_n := b \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(e) Aplicant primer l'apartat (c) de la proposició anterior i, a continuació, el (b).

(f) S'ha vist a la demostració de l'apartat (c) de la proposició anterior.

$\square$

Proposició 1.4.12. *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO, $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ successions d'elements de $\mathbb{K}$, $a, b \in \mathbb{K}$ i $N_0 \in \mathbb{N}$. Si $\forall n \geq N_0$ és $a_n \leq b_n$, $a_n \xrightarrow{n} a$ i $b_n \xrightarrow{n} b$, aleshores $a \leq b$.*

Demostració. Pel Corol·lari 1.4.11, tenim $(b_n - a_n)_n \xrightarrow{n} b - a$. Si fos $a > b$, prenent $\varepsilon := a - b > 0$, tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq \max\{n_0, N_0\}$ és $|(b_n - a_n) - (b - a)| < a - b$. En particular, $b_n - a_n + a - b < a - b \Rightarrow b_n < a_n \ \forall n \geq \max\{n_0, N_0\}$, contradicció. $\square$

Teorema 1.4.13 (Sandwich)**.** *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO, $(a_n)_n, (b_n)_n$ i $(c_n)_n$ successions d'elements de $\mathbb{K}$, $l \in \mathbb{K}$ i $N_0 \in \mathbb{N}$. Si $\forall n \geq N_0$ és $a_n \leq b_n \leq c_n$, $a_n \xrightarrow{n} l$ i $c_n \xrightarrow{n} l$, aleshores $b_n \xrightarrow{n} l$.*

Demostració. Sigui $\varepsilon > 0$, hem de veure que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $|b_n - l| < \varepsilon$. Aplicant la definició de límit a les successions $(a_n)_n$ i $(c_n)_n$, tenim que existeixen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tals que:
(1) $\forall n \geq n_1$ és $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$.
(2) $\forall n \geq n_2$ és $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$.
D'altra banda,
(3) $\forall n \geq N_0$ és $a_n \leq b_n \leq c_n$
Triem $n_0 :=\max\{N_0, n_1, n_2\}$. Llavors $\forall n \geq n_0$ es compleixen (1), (2) i (3), és a dir:

$$l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$$

O sigui, $|b_n - l| < \varepsilon$, com volíem veure. $\square$

Definició 1.4.14. Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO i $(a_n)_n$ una successió d'elements de $\mathbb{K}$. Diem que $(a_n)_n$ és de Cauchy si, i només si, es compleix:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}_{>0} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m \geq n_0 \text{ és } |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Proposició 1.4.15. *Sigui $\mathbb{K}$ un CCTO. Tota successió d'elements de $\mathbb{K}$ convergent és de Cauchy.*

Demostració. Suposem que $(a_n)_n$ és una successió de $\mathbb{K}$ amb límit $l \in \mathbb{K}$. Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores pel Lema 1.4.9, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Per tant, $\forall n, m \geq n_0$ és $|a_n - a_m| = |(a_n - l) + (l - a_m)| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Notem que la Definició 1.4.2 exigeix que els elements de $(a_n)_n$ es vagin apropant a un cert element $l \in \mathbb{K}$. En canvi, la Definició 1.4.14 només imposa que els elements de $(a_n)_n$ es vagin apropant entre si. Com bé mostra la proposició anterior, si els elements de $(a_n)_n$ s'apropen a un cert $l \in \mathbb{K}$, aleshores també s'apropen entre si.

Intuïtivament, podríem pensar que les successions de Cauchy també haurien de convergir sempre cap a un valor, però resulta que el concepte de Cauchy és, en general, més dèbil. De fet, parlant en termes molt intuïtius, podem dir que la diferència fonamental entre les dues definicions és que a la primera, les successions s'apropen a un cert valor de $\mathbb{K}$, mentre que a la segona s'apropen a un cert valor que no té perquè ser de $\mathbb{K}$.

En qualsevol cas, ens agradaria que en un cos de nombres reals, no hi hagués successions que s'apropessin a valors que no pertanyen al conjunt, és a dir, que d'alguna manera no poguéssim sortir-nos del conjunt fent passos al límit amb successions de Cauchy. Per això, la següent propietat és la última que li exigirem als cos de nombres reals.

Definició 1.4.16. Direm que un cos commutatiu totalment ordenat és *complet per successions*, si tota successió de Cauchy convergeix.

La següent proposició mostra que, en els sentits descrits anteriorment, no tenim suficient amb el cos $\mathbb{Q}$.

Proposició 1.4.17. *$\mathbb{Q}$ no és complet per successions*

Demostració. Només cal posar de manifest un exemple. Considerem a $\mathbb{Q}$, la successió amb terme general $a_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Veiem que $(a_n)_n$ és de Cauchy. Si $m > n$, llavors:

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\cdots m}\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{2}{(n+1)!}$$

Sigui ara $\varepsilon > 0$, com que $\mathbb{Q}$ és arquimedià, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, és a dir, $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Donats $n, m \geq n_0$, $m > n$, tenim $|a_m - a_n| < \frac{2}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, com volíem veure.

Suposem, per arribar a una contradicció, que $(a_n)_n$ convergeix cap a $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ amb $p, q \in \mathbb{Z}$. Si fos $\frac{p}{q} \leq a_{n_0}$ per algun $n_0 \in \mathbb{N}$, llavors $\forall n > n_0 + 1$ seria $a_n - \frac{p}{q} > \frac{1}{(n_0+1)!} > 0$ i per la Proposició 1.4.12, tindríem $\lim_n \left(a_n - \frac{p}{q}\right) \geq \frac{1}{(n_0+1)!} > 0$ i per la Proposició 1.4.10, $\lim_n a_n > \frac{p}{q}$, contradicció. D'altra banda, fixant $n \in \mathbb{N}$, és té que la successió $(a_m - a_n)_m$ convergeix cap a $\frac{p}{q} - a_n$ i donat $m > n$, és $a_m - a_n \leq \frac{2}{(n+1)!}$. Per la Proposició 1.4.12 és $\frac{p}{q} - a_n \leq \frac{2}{(n+1)!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. En definitiva, hem provat que:

$$0 < \frac{p}{q} - a_n \leq \frac{2}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si prenem $n > q, 1$ i multipliquem cada banda per $n!$, tenim:

$$0 < n!\frac{p}{q} - n!a_n \leq \frac{2}{(n+1)}$$

Però com que $n > q$, tant $n!\frac{p}{q}$ com $n!a_n$ són enters, és a dir, $N := n!\frac{p}{q} - n!a_n$ és un enter que compleix $0 < N < 1$, però això és impossible. Hem arribat a la contradicció que volíem.[5] □

1.5 Cossos de nombres reals

Comencem amb l'esperada definició de cos de nombres reals.

Definició 1.5.1. Anomenarem *cos de nombres reals* a tot cos commutatiu totalment ordenat, arquimedià i complet per successions.

[5]Notem que això demostraria que $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ és irracional.

Hi ha dos aspectes relatius a aquesta definició que caldria estudiar. En primer lloc, hauríem d'argumentar que efectivament existeix algun cos de nombres reals, és a dir, hauríem de construir un cos commutatiu totalment ordenat, arquimedià i complet per successions.

D'altra banda, ens podríem preguntar si només hi ha un únic cos de nombres reals o, si n'hi ha més, com podríem relacionar-los.

Aquesta secció està, per tant, dedicada a resoldre aquestes qüestions. En altres paraules, el nostre objectiu és demostrar el següent resultat.

Teorema 1.5.2. *Existeix un cos de nombres reals. Si $\mathbb{K}_1$ i $\mathbb{K}_2$ són cossos de nombres reals, aleshores existeix un isomorfisme monòton de cossos $\varphi : \mathbb{K}_1 \longrightarrow \mathbb{K}_2$.*

Notem que una vegada l'haguem provat, el primer problema que ens plantejàvem queda clarament resolt. En efecte, existeix un cos de nombres reals. Pel que fa a la segona qüestió, tindríem que hi ha un únic cos de nombres reals llevat d'isomorfisme monòton. Per tant, potser no podem dir que hi ha un únic cos de nombres reals, però sí que tots tenen la mateixa estructura de cos commutatiu totalment ordenat.

Veiem primer la segona part del teorema. Comencem amb uns resultats previs.

Lema 1.5.3. *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO i arquimedià, $x \in \mathbb{K}$ i $\Phi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{K}$ el morfisme monòton i injectiu de cossos del Teorema 1.3.6. Aleshores existeix una successió d'elements de $\mathbb{Q}$, $(b_n)_n$, tal que la successió $(\Phi(b_n))_n$ d'elements de $\mathbb{K}$ convergeix cap a x. En altres paraules, podem apropar-nos a qualsevol element de $\mathbb{K}$ mitjançant successions de racionals.*

Demostració. El cas $x = 0$ és clar: triem la successió constant amb terme general $b_n = 0$. Suposem que $x > 0$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem el conjunt $A_n := \{a \in \mathbb{N} : \Phi(n) \cdot x < \Phi(a)\}$. Observem que per l'arquimedianeïtat de $\mathbb{K}$, és $A_n \neq \varnothing$. Per tant, per la propietat del bon ordre de $\mathbb{N}$, tenim que tots els A_n tenen mínim. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ anomenem a_n al mínim de A_n. Notem que $\forall n \in \mathbb{N}$ és:

$$\Phi(a_n - 1) \leq \Phi(n) \cdot x < \Phi(a_n) \Rightarrow \Phi\left(\frac{a_n - 1}{n}\right) \leq x < \Phi\left(\frac{a_n}{n}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{-1}{n}\right) \leq x - \Phi\left(\frac{a_n}{n}\right) < 0 \Rightarrow 0 < \Phi\left(\frac{a_n}{n}\right) - x \leq \Phi\left(\frac{1}{n}\right)$$

Obtenim així una successió de racionals amb terme general $b_n := a_n/n$. Demostrarem que $(\Phi(b_n))_n = (\Phi(a_n/n))_n \xrightarrow{n} x$. Sigui $\varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}$, llavors per l'arquimedianeïtat de $\mathbb{K}$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ complint $1/\varepsilon < \Phi(n_0)$, és a dir, $\Phi(1/n_0) < \varepsilon$. Utilitzant les relacions anteriors i la monotonia de Φ, tenim que per a tot $n \geq n_0$ és

$$\left|\Phi\left(\frac{a_n}{n}\right) - x\right| = \Phi\left(\frac{a_n}{n}\right) - x \leq \Phi\left(\frac{1}{n}\right) \leq \Phi\left(\frac{1}{n_0}\right) < \varepsilon$$

com volíem veure.
Pel cas $x < 0$, com que $-x > 0$, existeix una successió de racionals $(a_n)_n$ tal que $(\Phi(b_n))_n \xrightarrow{n} -x$. Aleshores, prenent la successió $(-b_n)_n$, es té que $(\Phi(-b_n))_n = (-\Phi(b_n))_n$ convergeix cap a x (cf. Corol·lari 1.4.11 (b)). □

Corol·lari 1.5.4 (de la demostració del Lema 1.5.3)**.** *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO i arquimedià, $x, y \in \mathbb{K}$ amb $x < y$. Aleshores existeix $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < \Phi(q) < y$. En altres paraules, $\mathbb{Q}$ és dens en tot CCTO i arquimedià.*

Demostració. Suposem que $x > 0$. A la demostració anterior, hem construït una successió de racionals $(b_n)_n$ tal que $(\Phi(b_n))_n \xrightarrow{n} x$ i complint $x < \Phi(b_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Aplicant la definició de

límit amb $\varepsilon := y - x \in \mathbb{K}_{>0}$, tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi(b_{n_0}) - x = |\Phi(b_{n_0}) - x| < y - x$, és a dir, $x < \Phi(b_{n_0}) < y$, com volíem veure.
Si $x \leq 0 < y$, podem prendre la successió amb terme general $b_n := 1/n$ i pel mateix raonament, obtenim que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < 0 < \Phi(1/n_0) < y$.
Si $x < 0 \leq y$, igual amb $b_n := -1/n$.
Finalment, si $y < 0$, llavors $0 < -y < -x$. Per tant, existeix un racional q complint $-y < \Phi(q) < -x$, és a dir, $x < \Phi(-q) < y$. □

Passem ara a provar la unicitat llevat d'isomorfisme monòton.

Demostració. (de la segona part del Teorema 1.5.2)
Denotarem per $\Phi_1 : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{K}_1$ i $\Phi_2 : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{K}_2$ als morfismes del Teorema 1.3.6. El nostre objectiu és definir una aplicació $\varphi : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ que sigui bijectiva i que $\forall x, y \in \mathbb{K}_1$ es compleixi $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ i $x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$.
Sigui $x \in \mathbb{K}_1$. Pel lema anterior, existeix una successió de racionals $(b_n)_n$ tal que $(\Phi_1(b_n))_n$ que convergeix cap a x. Afirmem que la successió $(b_n)_n$ és de Cauchy.
En efecte, donat $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$, podem aplicar el Lema 1.4.9 amb $\varepsilon' := \Phi_1(\varepsilon) > 0$ i $C := 1/2 \in \mathbb{K}_1$ per obtenir que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $|\Phi_1(b_n) - x| < \Phi_1(\varepsilon/2)$, d'on es dedueix:

$$\forall n, m \geq n_0 \;\; \Phi_1(|b_n - b_m|) = |\Phi_1(b_n - b_m)| = |\Phi_1(b_n) - \Phi_1(b_m)| \leq |\Phi_1(b_n) - x| + |\Phi_1(b_m) - x| < \Phi_1(\varepsilon)$$

Utilitzant la monotonia de Φ_1 i (b4), obtenim el que volíem: $|b_n - b_m| < \varepsilon \;\; \forall n, m \geq n_0$.
Ara afirmem que la successió $(\Phi_2(b_n))_n$ de $\mathbb{K}_2$ té límit. Per veure-ho, és suficient mostrar que $(\Phi_2(b_n))_n$ és de Cauchy, ja que $\mathbb{K}_2$ és complet per successions. Sigui $\varepsilon \in \mathbb{K}_2, \varepsilon > 0$. Com que $\mathbb{K}_2$ és arquimedià, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi_2(N) > 1/\varepsilon$, és a dir, $\Phi_2(1/N) < \varepsilon$. Com que $(b_n)_n$ és de Cauchy (a $\mathbb{Q}$), tenim que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$ és $|b_n - b_m| < 1/N$, o sigui

$$|\Phi_2(b_n) - \Phi_2(b_m)| = \Phi_2(|b_n - b_m|) < \Phi_2(1/N) < \varepsilon$$

Recapitulem: a partir de cada $x \in \mathbb{K}_1$ hem construït una successió convergent de $\mathbb{K}_2$. Anomenarem $\varphi(x) \in \mathbb{K}_2$ al límit d'aquesta successió. Evidentment, s'ha de comprovar que $\varphi(x)$ no depèn de la successió $(b_n)_n$. Per fer-ho, suposem que $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ són successions de nombres racionals tals que $(\Phi_1(a_n))_n \xrightarrow{n} x$ i $(\Phi_1(b_n))_n \xrightarrow{n} x$. Aleshores $(\Phi_1(b_n - a_n))_n \xrightarrow{n} 0$. Raonant com abans, tenim $(b_n - a_n)_n \xrightarrow{n} 0$. D'això podem deduir tornant a utilitzar l'arquimedianeïtat de $\mathbb{K}_2$, que $(\Phi_2(b_n - a_n))_n \xrightarrow{n} 0$, o sigui, $(\Phi_2(a_n))_n$ i $(\Phi_2(b_n))_n$ tenen el mateix límit, com volíem veure.
Per acabar de provar el resultat, només falta comprovar que es compleixen les propietats mencionades al principi de la demostració:

- $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$ i $\varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{K}_1$ són conseqüència de la Proposició 1.4.10

- Siguin $x, y \in \mathbb{K}_1$ amb $x < y$, volem veure que $\varphi(x) < \varphi(y)$. Escollim successions de racionals $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ tals que $(\Phi_1(a_n))_n \xrightarrow{n} x$ i $(\Phi_1(b_n))_n \xrightarrow{n} y$. Aplicant la definició de límit amb $\varepsilon := \frac{y-x}{2}$, tenim que existeixen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tals que $\forall n \geq n_1, n_2$ és

$$|\Phi_1(a_n) - x| < \frac{y - x}{2} \Rightarrow \Phi_1(a_n) < \frac{x + y}{2}$$

$$|\Phi_1(b_n) - y| < \frac{y - x}{2} \Rightarrow \frac{x + y}{2} < \Phi_1(b_n)$$

  Pel Corol·lari 1.5.4, podem prendre racionals q_x, q_y tals que $\forall n \geq n_1, n_2$ és $\Phi_1(a_n) < \Phi_1(q_x) < \Phi_1(q_y) < \Phi_1(b_n)$ i, per (b4), és $a_n < q_x < q_y < b_n$, i per tant, $\Phi_2(a_n) < \Phi_2(q_x) < \Phi_2(q_y) < \Phi_2(b_n)$. Per acabar, aplicant la Proposició 1.4.12 obtenim $\varphi(x) \leq \Phi_2(q_x) < \Phi_2(q_y) \leq \varphi(y)$.

- φ injectiva és conseqüència de la monotonia. En efecte, si $x, y \in \mathbb{K}_1, x \neq y$, llavors, per (b4), és $x < y$ o $y < x$, o sigui, seria $\varphi(x) < \varphi(y)$ o bé $\varphi(y) < \varphi(x)$. En qualsevol cas, és $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

- Per últim, veiem que φ és exhaustiva. Sigui $y \in \mathbb{K}_2$, aleshores podem invertir els papers de $\mathbb{K}_1$ i $\mathbb{K}_2$ al principi d'aquesta demostració, per obtenir una successió de racionals $(a_n)_n$ tal que $(\Phi_2(a_n))_n$ convergeix cap a y i $(\Phi_1(a_n))_n$ té límit a $\mathbb{K}_1$, diguem-li x. Per construcció, tenim $\varphi(x) = y$.

□

Pel que fa a la primera part del Teorema 1.5.2 tenim diverses possibilitats per abordar-la. Tal i com hem definit el concepte de cos de nombres reals, potser el més adient seria seguir la construcció de Georg Cantor. No obstant, nosaltres seguirem la de Richard Dedekind[6]. Aquesta potser no s'adapta tant a la Definició 1.5.1, però a canvi, ens permetrà aplicar els resultats obtinguts per formular una definició de cos de nombres reals equivalent. Això últim s'aclarirà més endavant.

Comencem amb unes definicions prèvies.

Definició 1.5.5. Sigui $A \subseteq \mathbb{Q}$, diem que A és un *tallament de Dedekind* si es compleixen:

(1) $A \neq \varnothing, A \neq \mathbb{Q}$.

(2) Si $a \in A$ i $b < a$, aleshores $b \in A$.

(3) Si $a \in A$, aleshores existeix $b \in A$ tal que $a < b$.

Intuïtivament, podem pensar que els tallaments de Dedekind són els intervals de la forma $(-\infty, b)$, on b no tindria per què ser un nombre racional. Això, evidentment, no té sentit per ara, ja que no podem especificar què vol dir que b no sigui racional, però va bé per tenir una vaga idea dels conceptes amb què treballem.

El cas és que el nostre objectiu serà definir una estructura de cos commutatiu totalment ordenat, arquimedià i complet per successions sobre el conjunt $\mathcal{R} := \{\text{tallaments de Dedekind}\}$. Per tant, també podrem pensar que els intervals $(-\infty, b)$ representen nombres reals. Per exemple, el conjunt $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ o bé } x^2 < 2\}$ és un tallament de Dedekind que podríem pensar com l'interval $(-\infty, \sqrt{2})$, però també com el nombre $\sqrt{2}$.

Passem a definir l'ordre i les operacions de $\mathcal{R}$

Definició 1.5.6. Siguin $A, B \in \mathcal{R}$. Definim:

- $A \leq B$ si, i només si, $A \subseteq B$. En particular, $A < B$ si, i només si, $A \subsetneq B$.

- $A_0 := \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$

- $A_1 := \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$

- $-A := \{x \in \mathbb{Q} : \exists y \in \mathbb{Q} \setminus A, x < -y\}$

- $A + B := \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A, b \in B\}$

- Si $A \neq A_0$, llavors $A^{-1} := \begin{cases} \{x \in \mathbb{Q}_{>0} : \exists y \in \mathbb{Q} \setminus A, y < \frac{1}{x}\} \cup A_0 \cup \{0\} & \text{si } A > A_0 \\ -((-A)^{-1}) & \text{si } A < A_0 \end{cases}$

[6] Si us interessa la de Cantor, podeu consultar, per exemple, [Ort, pàg.50]

- $A \cdot B := \begin{cases} \{a \cdot b \in \mathbb{Q}_{>0} : a \in A, b \in B, a, b \geq 0\} \cup A_0 & \text{si } A > A_0 \text{ i } B > A_0 \\ -(A \cdot (-B)) & \text{si } A > A_0 \text{ i } B < A_0 \\ -((-A) \cdot B) & \text{si } A < A_0 \text{ i } B > A_0 \\ (-A) \cdot (-B) & \text{si } A < A_0 \text{ i } B < A_0 \\ A_0 & \text{si } A = A_0 \text{ o } B = A_0 \end{cases}$

Per assegurar que aquestes operacions estan ben definides, caldria comprovar que $A > A_0 \Leftrightarrow -A < A_0$ i $-(-A) = A$.

El següent resultat és rutinari i no el demostrarem. Notem que, per exemple, els axiomes (b1), (b2), (b3), (b4) són pràcticament immediats, però per alguns altres caldria distingir molts casos i la demostració tampoc ens aportaria res interessant més enllà del propi resultat.

Proposició 1.5.7. *El conjunt $\mathcal{R}$ amb les operacions i l'ordre de la Definició 1.5.6 és un cos commutatiu totalment ordenat.*

Els següents resultats estan dedicats a provar l'arquimedianeïtat i la completesa per successions de $\mathcal{R}$.

Proposició 1.5.8. *Tot subconjunt no buit de $\mathcal{R}$ acotat superiorment té suprem.*

Demostració. Sigui $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{C} \neq \varnothing$ acotat superiorment, i.e., $\exists B \in \mathcal{R}$ tal que $\forall A \in \mathcal{C}$ és $A \leq B$. Definim $S := \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$. Provarem que S és el suprem de $\mathcal{C}$. Primer cal veure que $S \in \mathcal{R}$. Comprovem les propietats dels tallaments de Dedekind:

(1) $S \neq \varnothing$, perquè $\mathcal{C} \neq \varnothing$ i tot tallament de Dedekind és diferent del buit.
$S \neq \mathbb{Q}$, perquè $\forall A \in \mathcal{C}$ és $A \leq B < B + A_1$. Per tant, existeix $b \in B + A_1$ que no pertany a B, és a dir, no pertany cap $A \in \mathcal{C}$. En particular, $b \notin S$.

(2) Si $a \in S$ i $b < a$, aleshores $a \in A$ per algun $A \in \mathcal{C}$. Com que A és un tallament de Dedekind, ha de ser $b \in A$, o sigui $b \in S$.

(3) Si $a \in S$, aleshores $a \in A$ per algun $A \in \mathcal{C}$. Com que A és un tallament de Dedekind, ha d'existir $b \in A$ (en particular, $b \in S$) tal que $a < b$.

Per acabar, comprovem que S és el mínim de les cotes superiors de $\mathcal{C}$:

(1) S és cota superior de $\mathcal{C}$: donat $A \in \mathcal{C}$, és $A \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = S$, o sigui, $A \leq S$.

(2) S és cota inferior del conjunt de les cotes superiors de $\mathcal{C}$: sigui S' una cota superior de $\mathcal{C}$, aleshores $\forall A \in \mathcal{C}$ és $A \subseteq S'$, i.e., $S = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \subseteq S'$. Per tant, $S \leq S'$.

$\square$

Definició 1.5.9. Direm que un cos commutatiu totalment ordenat compleix *l'axioma del suprem* si tot subconjunt no buit i acotat superiorment té suprem.

Com a conseqüència de la Proposició 1.5.8, $\mathcal{R}$ compleix l'axioma del suprem i, per tant, per acabar de provar l'existència del Teorema 1.5.2 serà suficient demostrar el següent:

Teorema 1.5.10. *Tot cos commmutatiu totalment ordenat que compleix l'axioma del suprem és un cos de nombres reals.*

Abans de començar la prova, enunciem i demostrem aquest resultat.

Proposició 1.5.11. *Siguin $\mathbb{K}$ un CCTO que compleix l'axioma del suprem i $(a_n)_n$ una successió de $\mathbb{K}$ monòtona creixent (resp. monòtona decreixent) i acotada superiorment (resp. inferiorment). Llavors $(a_n)_n$ té límit.*

Demostració. Suposem que $\forall n \in \mathbb{N}$ és $a_n \leq a_{n+1}$ i que $\exists C \in \mathbb{K}$ tal que $a_n < C$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Aleshores el conjunt $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ està acotat superiorment per C i, per tant, podem definir $l := \sup A$. Utilitzant l'exercici **1.5.**, tenim que $a_n \leq l$ $\forall n \in \mathbb{N}$ i $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $l - \varepsilon < a_{n_0} \leq l$. Per tant, per a $n \geq n_0$ tindrem:

$$l - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq l \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

El cas $(a_n)_n$ monòtona decreixent i acotada inferiorment es fa anàlogament, però necessitem que tot conjunt no buit i acotat inferiorment tingui ínfim. Això últim es pot pensar com una conseqüència de l'exercici **1.6.**(d). □

Demostració. (del Teorema 1.5.10 i, conseqüentment, de la primera part del Teorema 1.5.2)
Siguin $\mathbb{K}$ un cos commutatiu totalment ordenat que compleix l'axioma del suprem i $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K}$ el seu morfisme característic. Hem de veure que $\mathbb{K}$ és arquimedià i complet per successions.
Comencem per l'arquimedianeïtat:
Amb l'objectiu d'arribar a una contradicció, suposem que $\phi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{K}$ està acotat. Si posem $S := \sup \phi(\mathbb{N})$, llavors S és cota superior de $\phi(\mathbb{N})$ i, per exemple, $S - 1$ no ho és. O sigui, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(n) > S - 1$. Però llavors $\phi(n+1) > S$ contradient el fet que S sigui cota superior de $\phi(\mathbb{N})$.
Veiem ara la completesa per successions:
Suposem que $(a_n)_n$ és una successió de Cauchy. Llavors triant $\varepsilon := 1$, tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $|a_n - a_{n_0}| < 1 \Rightarrow a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1$. Triant $C := \max\{|a_0|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0} - 1|, |a_{n_0} + 1|\}$, es té que $|a_n| \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$, és a dir, tota successió de Cauchy està acotada.
Considerem ara la successió $(s_n)_n$ de $\mathbb{K}$ amb terme general $s_n := \sup\{a_i : i > n\}$. Notem que $s_n \geq S_{n+1}$, ja que $\{a_i : i > n+1\} \subseteq \{a_i : i > n\}$, i $|s_n| \leq C$. En particular, $(s_n)_n$ és monòtona decreixent i acotada inferiorment. Per la proposició anterior, $(s_n)_n$ té límit, diguem-li l. Veurem que l és també el límit de $(a_n)_n$.
Sigui $\varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}$, aleshores:

(1) $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$ és $|s_n - l| < \varepsilon/3$.

(2) $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_2$ és $|a_n - a_m| < \varepsilon/3$.

(3) Per l'exercici **1.5.**, $\exists n_3 \in \mathbb{N}, n_3 > n_0 := \max(n_1, n_2)$ tal que $S_{n_0} - \varepsilon/3 < a_{n_3} < S_{n_0} \Rightarrow |a_{n_3} - S_{n_0}| < \varepsilon/3$.

Per tant, $\forall n \geq n_3$ tenim:

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n_3}| + |a_{n_3} - S_{n_0}| + |S_{n_0} - l| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Això acaba les demostracions dels Teoremes 1.5.10 i 1.5.2. □

Doncs això és tot, ja tenim assegurada l'existència i la unicitat llevat d'isomorfisme monòton. Però recordem que havíem dit que un dels avantatges d'aquesta construcció és que ens faria passar per una definició equivalent de cos de nombres reals. En efecte, hem obtingut aquest regal:

Corol·lari 1.5.12. *Un cos commutatiu totalment ordenat és un cos de nombres reals si, i només si, compleix l'axioma del suprem.*

Demostració. La implicació de dreta a esquerra és el Teorema 1.5.10.
Per la d'esquerra a dreta, suposem que $\mathbb{K}$ és un cos de nombres reals. Per la segona part del Teorema 1.5.2, existeix un isomorfisme monòton $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{R}$. Sigui ara $A \subseteq \mathbb{K}$, $A \neq \varnothing$ acotat superiorment, volem veure que A té suprem.
Per ser acotat superiorment, existeix $C \in \mathbb{K}$ tal que $a \leq C \quad \forall a \in A$. Per la monotonia de φ, tenim que $\varphi(a) \leq \varphi(C) \quad \forall a \in A$. Per tant, $\varphi(A) \subseteq \mathcal{R}$ també és acotat superiorment. Com que $\mathcal{R}$ compleix l'axioma del suprem, podem posar $x := \sup \varphi(A)$. Definim $S := \varphi^{-1}(x)$. Provarem que S és el suprem de A:

(1) S és cota superior de A: sigui $a \in A$, si fos $a > S$, aleshores $\varphi(a) > \varphi(S) = x$, contradient $x = \sup \varphi(A)$.

(2) S és cota inferior del conjunt de les cotes superiors de A: sigui S' una cota superior de A, aleshores $\varphi(S')$ és una cota superior de $\varphi(A)$. Per tant, ha de ser $x = \varphi(S) \leq \varphi(S')$. Si fos $S' < S$, llavors $\varphi(S') < \varphi(S)$, contradicció. En definitiva, és $S \leq S'$.

□

Tot i que aquesta demostració és totalment vàlida, potser la gràcia d'aquests resultats està en provar-los utilitzant únicament els axiomes de la Definició 1.5.1. Així ho farem a la propera secció.

1.6 Propietats dels cossos de nombres reals

L'objectiu d'aquesta secció serà enunciar i provar resultats relatius als cossos de nombres reals, però sense basar-nos en cap construcció en concret. Utilitzarem, doncs, només la Definició 1.5.1 i anomenarem $\mathbb{R}$ a un cos de nombres reals arbitrari. A més a més, prescindirem de l'ús de Φ, és a dir, pensarem que tot racional és un element de $\mathbb{R}$.

Definició 1.6.1. Anomenem successió d'intervals en $\mathbb{R}$ tancats i encaixats a tota successió $(I_n)_n$, on $\forall n \in \mathbb{N}$ és $I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ amb $a_n < b_n$ i $I_{n+1} \subseteq I_n$.
Donat un interval $I = [a, b]$ amb $a \leq b$, definim la seva longitud per $l(I) = \operatorname{long}(I) := b - a \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.6.2 (Intervals encaixats)**.** *Sigui $(I_n)_n$ una successió d'intervals en $\mathbb{R}$ tancats i encaixats tal que $(\operatorname{long}(I_n))_n \xrightarrow{n} 0$, aleshores existeix $x \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$.*

Demostració. Escriurem $I_n = [a_n, b_n]$. Notem que, en particular, és $(b_n - a_n)_n \xrightarrow{n} 0$, ja que $\operatorname{long}(I_n) = b_n - a_n$.
Per l'axioma de l'elecció, existeix una aplicació $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(n) \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$[7]. Segons la Definició 1.4.1, φ és una successió de $\mathbb{R}$. Posarem $(c_n)_n := \varphi$, és a dir, $c_n = \varphi(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Veiem que $(c_n)_n$ és de Cauchy.
Sigui $\varepsilon > 0$, com que $(b_n - a_n)_n \xrightarrow{n} 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $b_n - a_n < \varepsilon$. Llavors per a $m \geq n \geq n_0$, tenim $c_n \in I_n$ i $c_m \in I_m \subseteq I_n$, o sigui,

$$a_n \leq c_n, c_m \leq b_n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} a_n & \leq c_n & \leq b_n \\ -b_n & \leq -c_m & \leq -a_n \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -(b_n - a_n) \leq c_n - c_m \leq b_n - a_n \Rightarrow |c_n - c_m| \leq b_n - a_n < \varepsilon$$

Com que $\mathbb{R}$ és complet per successions, podem definir $x := \lim c_n$. Falta demostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$:

[7]Es pot evitar l'ús de l'axioma de l'elecció si es defineix, per exemple, $\varphi(n) := a_n$

- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \supseteq \{x\}$: sigui $n \in \mathbb{N}$, aleshores és $a_n \leq c_m \leq b_n \quad \forall m \geq n$. Utilitzant la Proposició 1.4.12 amb la successió $(c_m)_m$ i les successions constants $(a_n)_m, (b_n)_m$, tenim $a_n \leq x \leq b_n$, és a dir, $x \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subseteq \{x\}$: sigui $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, llavors per a tot $n \in \mathbb{N}$ tenim:

$$\left\{ \begin{array}{lll} a_n & \leq x & \leq b_n \\ -b_n & \leq -y & \leq -a_n \end{array} \right\} \Rightarrow -(b_n - a_n) \leq x - y \leq b_n - a_n \Rightarrow 0 \leq |x-y| \leq b_n - a_n \xrightarrow{n} 0$$

Utilitzant de nou la Proposició 1.4.12 o la Regla del Sandwich (cf. Teorema 1.4.13), tenim $|x-y| = 0$, o sigui, $y = x$.

$\square$

Com ja s'ha comentat, el resultat següent ja ha estat provat (cf. Corol·lari 1.5.12), però ara ho farem amb els axiomes de cos de nombres reals.

Teorema 1.6.3 (Existència del suprem)**.** *Sigui $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ acotat superiorment (resp. inferiorment), aleshores A té suprem (resp. ínfim).*

Demostració. Degut a l'exercici **1.6.**(d), serà suficient provar el cas A acotat superiorment.
Com que $A \neq \varnothing$, tenim que $\exists a_0 \in A$. D'altra banda, com que A està acotat superiorment, $\exists b_0 \in \mathbb{R}$ cota superior de A.
Definim la successió d'intervals $(I_n)_n$ de forma recursiva per:

$$I_0 := [a_0, b_0], \quad I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] := \left\{ \begin{array}{ll} [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n], & \text{si } [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] \cap A \neq \varnothing \\ [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}], & \text{si } [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] \cap A = \varnothing \end{array} \right. \quad \text{per a } n \geq 0$$

Aleshores es compleixen les següents propietats:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, b_n és cota superior de A.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \cap A \neq \varnothing$.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$ és $I_n \subseteq I_{n+1}$.

(4) $\text{long}(I_n) = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \xrightarrow{n} 0$.

Les tres primeres es poden provar fàcilment per inducció, mentre que per la última es pot demostrar també per inducció que $\forall n \geq 1$ és $2^n > n$ i, a continuació, aplicar la Regla del Sandwich i el Corol·lari 1.4.11(a).
Pel Teorema dels intervals encaixats, existeix $S \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{S\}$. Veurem que S és el suprem de A.

(a) S és cota superior de A: suposem el contrari, és a dir, que $a > S$ per algun $a \in A$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, tenim:

$$a_n \leq S \leq b_n \Rightarrow -b_n \leq -S \leq -a_n \Rightarrow 0 \leq b_n - S \leq b_n - a_n \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow (b_n)_n \xrightarrow{n} S$$

Sigui $\varepsilon := a - S > 0$, llavors existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{n_0} - S < a - S$, és a dir, $b_{n_0} < a$. Això contradiu la propietat (1) anterior.

(b) S és cota inferior del conjunt de les cotes superiors de A: suposem el contrari, és a dir, que existeix S' cota superior de A tal que $S' < S$. Ja hem vist que $b_n \xrightarrow{n} S$. Això, junt amb $b_n - a_n \xrightarrow{n} 0$, mostra que $a_n \xrightarrow{n} S$. Per tant, per a $\varepsilon := S - S' > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S - a_{n_0} < S - S'$, és a dir, $S' < a_{n_0}$. Però per la propietat (2) anterior, $[a_{n_0}, b_{n_0}] \cap A \neq \varnothing$, la qual cosa contradiu el fet que S' és cota superior de A.

□

Lema 1.6.4. *Siguin $t, s \in \mathbb{R}$, $t, s > 0$, aleshores:*

(a) *Si $s < t$, llavors $s^n < t^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$*

(b) *Si $t < 1$, llavors $t^n < \ldots < t^2 < t < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$*

(c) *Si $t > 1$, llavors $1 < t < t^2 < \ldots < t^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$*

Demostració. Notem d'entrada que $t^n > 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. En efecte, per a $n = 1$ és cert i si ho és per a un cert $n \in \mathbb{N}$, llavors $t^{n+1} = t^n \cdot t > 0$ per (b6).

(a) Per a $n = 1$ és clar. Suposem que es compleix per a un cert $n \in \mathbb{N}$. Aleshores $s^{n+1} = s^n \cdot s < s^n \cdot t < t^n \cdot t = t^{n+1}$, on hem utilitzat el Corol·lari 1.2.8.

(b) Per a $n = 1$ és clar. Suposem que es compleix per a un cert $n \in \mathbb{N}$. Només cal veure que $t^{n+1} < t^n$. Això equival a $t^n(1-t) > 0$, que és cert, perquè $1 - t, t^n > 0$ i per (b6).

(c) Per a $n = 1$ és clar. Suposem que es compleix per a un cert $n \in \mathbb{N}$. Només cal veure que $t^{n+1} > t^n$. Això equival a $t^n(t-1) > 0$, que és cert, perquè $t - 1, t^n > 0$ i per (b6).

□

Teorema 1.6.5 (Existència de l'arrel n-èssima)**.** *Siguin $x \in \mathbb{R}, x > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Aleshores existeix un únic real positiu y tal que $y^n = x$. Escriurem $y = \sqrt[n]{x}$.*

Demostració. Veiem primer la unicitat. Si fos $0 < y_1 < y_2$ i $y_1^n = x = y_2^n$, aleshores per l'apartat (a) del lema anterior, tindríem $y_1^n < y_2^n$, la qual cosa és una contradicció.
Per l'existència, considerem el conjunt $E := \{t > 0 : t^n < x\}$. Llavors:

- $E \neq \varnothing$: provarem que $t := \frac{x}{x+1} \in E$. Notem que $t < x \Leftrightarrow x < x^2 + x \Leftrightarrow 0 < x^2$ que és cert. D'altra banda, $t < 1$, perquè $x + 1 > x$. Per l'apartat (b) del lema anterior, tenim $t^n < \ldots < t < x$, com volíem veure.

- E està acotat superiorment: veiem que $x + 1$ és cota superior de E. Suposem el contrari, és a dir, que existeix $t \in E$ tal que $t > x + 1$. En particular, tindrem $t > x$ i $t > 1$. Per l'apartat (c) del lema anterior, obtenim $t^n > \ldots > t > x$, és a dir, $t \notin E$, contradicció.

Definim $y := \sup E$ i suposem, amb l'objectiu d'arribar a una contradicció, que $y^n \neq x$. Notem que per a $m \in \mathbb{N}$ és $b^m - a^m = (b-a)(b^{m-1} + b^{m-2}a + b^{m-3}a^2 + \ldots + a^{m-1}$. En particular, si $0 < a < b$, llavors:

$$b^m - a^m \leq (b-a)mb^{m-1} \qquad (*)$$

Tenim dos casos:

- $y^n < x$: triem $h \in \mathbb{R}$ complint $0 < h < \min\left(\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}, 1\right)$ (existeix al menys un pel Corol·lari 1.5.4). Aleshores:

$$(y+h)^n - y^n \overset{(*)}{\leq} hn(y+h)^{n-1} \leq hn(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

  Hem provat que $(y+h)^n < x$, o sigui, $y + h \in E$ amb $h > 0$. Això contradiu el fet que y sigui cota superior de E.

- $y^n > x$: definim $k := \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}$. Observem que $0 < k < y$. Però per a tot $t > y - k$ tenim:

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n \overset{(*)}{\leq} kny^{n-1} = y^n - x$$

  Per tant, $t^n \geq x$, és a dir, $t \notin E$. Això mostra que $y - k$ és cota superior de E, la qual cosa contradiu que y sigui la cota superior més petita.

Com que en qualsevol cas arribem a una contradicció, hem acabat la prova. □

Exercicis

1.7. Anomenarem valor absolut a $\mathbb{Q}$ a tota aplicació $||\cdot|| : \mathbb{Q} \longrightarrow [0, +\infty)$ que compleix:

(1) $||x|| = 0$ si, i només si, $x = 0$

(2) $||xy|| = ||x|| \cdot ||y||$

(3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Demostreu que:

(a) $||1|| = ||-1|| = 1$.

(b) Si es compleix $||x + y|| \leq \max(||x||, ||y||)\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$, aleshores si $b \in D(a, r) := \{x \in \mathbb{Q} : ||a - x|| < r\}$, tenim que $D(a, r) = D(b, r)$.

(c) Si es compleix $||x + y|| \leq \max(||x||, ||y||)\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$, aleshores $||n|| \leq 1\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

(d) El recíproc de l'apartat (c).

1.8. Sigui $(A_n)_n$ una successió de subconjunts no buits de $\mathbb{R}$ acotats superiorment i tal que $A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Posem $s_n := \sup A_n$. Demostreu que $(s_n)_n$ convergeix si, i només si, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ està acotat superiorment i, en aquest cas, $(s_n)_n \xrightarrow{n} \sup A$.

1.9. Per a quins $\alpha \in \mathbb{R}$ es pot afirmar que tota successió $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}$ complint

$$|x_{n+1} - x_n| \leq n^\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

convergeix?

1.10. Sigui $(x_n)_n$ una successió de nombres reals.

(a) Suposem que existeixen $\rho \in (0, 1), M > 0$ i $p \in \mathbb{N}$ complint que $|x_{n+1} - x_n| \leq M\rho^n$ per a tot $n \geq p$. Demostreu que la successió $(x_n)_n$ és convergent.

(b) Suposem que existeixen $\rho \in (0, 1)$ i $p \in \mathbb{N}$ complint que $|x_{n+1} - x_n| \leq \rho|x_n - x_{n-1}|$ per a tot $n \geq p$. Demostreu que la successió $(x_n)_n$ és convergent.

1.11. Demostreu que si una successió $(a_n)_n$ de nombres reals no està acotada superiorment, aleshores té una parcial $(a_{n_k})_k \vdash (a_n)_n$ tal que $a_{n_k} \xrightarrow{k} +\infty$.

1.12. Sigui $(x_n)_n$ una successió de nombres reals acotada. Considerem les successions $(y_n)_n$ i $(z_n)_n$ amb termes generals $y_n := \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ i $z_n := \max\{x_1, \ldots, x_n\}$. Demostreu que $(y_n)_n$ i $(z_n)_n$ convergeixen i que $\lim y_n \leq \lim z_n$.

1.13. 1) Sigui $(m_n)_n$ una successió d'enters. Demostreu que si $(m_n)_n$ és una successió de Cauchy, llavors existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$, és $m_n = m_{n_0}$. En particular, podem dir que tota successió d'enters i de Cauchy és convergent.

2) Siguin $(p_n)_n$ i $(q_n)_n$ successions de nombres enters no nuls tals que $(q_n)_n$ és acotada i $(p_n/q_n)_n$ convergeix cap a $x \in \mathbb{R}$. Demostreu que $x \in \mathbb{Q}$.

1.14. Siguin $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(x_n)_n$ successions de nombre reals complint:

(a) Per a tot $k \geq 1, a_k < b_k$.

(b) $(b_k - a_k)_k \xrightarrow{k} 0$

(c) Per a tot $k \geq 1$, el conjunt $A_k = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin (a_k, b_k)\}$ és finit.

Demostreu:

1) La successió $(x_n)_n$ és convergent.

2) Si $x = \lim x_n$, llavors $a_k \leq x \leq b_k$ per a tot $k \geq 1$.

3) $\lim a_k = \lim b_k = x$.

Capítol 2

Espais mètrics

L'objectiu principal del capítol anterior era demostrar l'existència d'un cos de nombres reals. Podríem dir, per tant, que el contingut fonamental de l'assignatura comença ara i que les seccions anteriors servien per justificar de forma abstracta el fet que en els següents capítols utilitzem un cos de nombres reals, $\mathbb{R}$, de la forma habitual.

2.1 Límits i continuïtat

Definició 2.1.1. Un *espai mètric* és un parell (X, d), on X és un conjunt no buit els elements del qual anomenarem *punts* i

$$d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$$

és una aplicació tal que per a tots $x, y, z \in X$ compleix:

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Exemple 2.1.2.
- El típic: $(\mathbb{R}^n, d)$, on per a $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ és $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$
- Un no tan típic: $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$, on $\mathcal{C}([0, 1])$ és el conjunt de les funcions reals contínues en $[0, 1]$ (cf. 2.1.10) i per a $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$ és $d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$
- Un altre no tan típic: $(\mathcal{C}([0, 1]), d_1)$, on per a $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$ és $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$

Definició 2.1.3. Siguin (X, d) un espai mètric, $p \in X$ i $a \in [0, +\infty)$. Anomenarem *bola oberta* (resp. *tancada*) de centre p i radi a al conjunt:

$$B(p, a) := \{x \in X : d(x, p) < a\} \quad (\text{resp. } \bar{B}(p, a) := \{x \in X : d(x, p) \leq a\})$$

Definició 2.1.4. Siguin (X, d) un espai mètric, $E \subseteq X$ i $p \in X$. Direm que p és un *punt límit de* E si per a tot $\varepsilon > 0$ és $E \cap B(p, \varepsilon) \backslash \{p\} \neq \varnothing$.
Denotarem per E' al conjunt de tots els punts límit de E.

Notem que podem pensar que els punts límit de E són aquells que estan a E o bé 'infinitament a prop' de E. No obstant, això no sempre és cert. Per exemple, si E és un únic punt o bé un conjunt finit de punts, aleshores E no té punts límit. Com veurem de seguida, aquest tipus de conjunts (i, fins i tot, d'altres) ens conduiran a alguns problemes formals que haurem de considerar en detall.

Definició 2.1.5. Siguin (X, d_x) i (Y, d_y) espais mètrics, $E \subseteq X$, $f : E \longrightarrow Y$ una funció [1], $p \in E'$ i $l \in Y$. Diem que *l és el límit de f quan x tendeix cap a p* (i escrivim $\lim_{x \to p} f(x) = l$) si, i només si,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in E \text{ complint } 0 < d_x(x,p) < \delta, \text{ és } d_y(f(x), l) < \varepsilon$$

Proposició 2.1.6. *Amb les notacions de la definició anterior, el límit és únic.*

Demostració. Suposem que $l' \in Y$ també ho compleix. Per a tot $\varepsilon > 0$ tenim que existeixen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tals que $\forall x \in E, 0 < d_x(x,p) < \delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ és

$$d_y(l, l') \leq d_y(l, f(x)) + d_y(f(x), l') < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Pel Lema 1.4.6, tenim que $d(l, l') = 0$, és a dir, $l = l'$. □

Convé definir també el concepte de límit d'una successió de punts, el qual és una generalització de la Definició 1.4.2.

Definició 2.1.7. Siguin (X, d) un espai mètric, $(x_n)_n$ una successió d'elements de X i $p \in X$. Direm que *p és el límit de $(x_n)_n$* o que *$(x_n)_n$ tendeix cap a p* si la successió de nombres reals $(d(x_n, p))_n$ convegeix cap a 0, és a dir, si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ és } d(x_n, p) < \varepsilon$$

En aquest cas, escriurem $\lim_n x_n = p$, $(x_n)_n \xrightarrow{n} p$, $x_n \xrightarrow{n} p$, entre d'altres.

Com és d'esperar, el límit d'una successió de punts és únic. Per provar-ho, es pot seguir un raonament anàleg al de la demostració del Teorema 1.4.7.

També podem generalitzar la idea de successió de Cauchy (cf. Definició 1.4.14):

Definició 2.1.8. Siguin (X, d) un espai mètric i $(x_n)_n$ una successió d'elements de X. Direm que $(x_n)_n$ *és de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m \geq n_0 \text{ és } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Teorema 2.1.9. *Siguin (X, d_x) i (Y, d_y) espais mètrics, $E \subseteq X$, $f : E \longrightarrow Y$ una funció, $p \in E'$ i $l \in Y$. Aleshores són equivalents:*

(1) $\lim_{x \to p} f(x) = l$

(2) $\forall (x_n)_n \subseteq E \setminus \{p\}$ *tal que* $\lim_n x_n = p$ *és* $\lim_n f(x_n) = l$

Demostració. (1) $\Rightarrow$ (2) : Sigui $(x_n)_n$ una successió de $E \setminus \{p\}$ tal que $\lim_n x_n = p$. Hem de veure que la successió $(d_y(f(x_n), l))_n$ convergeix cap a 0.
Sigui $\varepsilon > 0$. Per (1), tenim que existeix $\delta > 0$ tal que:

$$x \in E, 0 < d_x(x,p) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), l) < \varepsilon \qquad (*)$$

Si apliquem la Definició 2.1.7 amb aquest $\delta > 0$, tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $0 < d_x(x_n, p) < \delta$. Finalment, per $(*)$ tenim $d_y(f(x_n), l) < \varepsilon$, com volíem veure.

[1]En aquest capítol i en els dos següents, quan diguem que $f : E \to Y$ és una funció, ens referirem a que f està definida a tot E, és a dir, que f és, en realitat, una aplicació. Una forma més correcte seria dir que $f : X \to Y$ és una funció. No obstant, és necessari explicitar el domini de f en el propi enunciat i, per això, mantindrem $f : E \to Y$ a les següents seccions.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Pel contrarecíproc. Suposem que $\lim\limits_{x\to p} f(x) \neq l$. Llavors existeix $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0 \; \exists x \in E \text{ complint } 0 < d_x(x,p) < \delta \text{ i } d_y(f(x),l) \geq \varepsilon \qquad (**)$$

Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem $A_n := \{x \in E : 0 < d_x(x,p) < 1/n, d_y(f(x),l) \geq \varepsilon\}$. Per $(**)$, tenim que $A_n \neq \varnothing$. L'axioma de l'elecció ens permet prendre una successió $(x_n)_n$ tal que $x_n \in A_n$ per a cada $n \in \mathbb{N}$. Aquesta successió és, en particular, d'elements de $E \setminus \{p\}$. A més a més, $0 < d_x(x_n,p) < 1/n$, per tant, per la Regla del Sandwich, és $d_x(x_n,p) \xrightarrow{n} 0$. D'altra banda, $d_y(f(x_n),l) \geq \varepsilon$. Per la Proposició 1.4.12 ha de ser $\lim\limits_n d_y(f(x_n),l) \geq \varepsilon > 0$ o bé $(d_y(f(x_n),l))_n$ no convergeix. En qualsevol cas, tenim $\lim\limits_n f(x_n) \neq l$. □

Definició 2.1.10. Siguin (X,d_x) i (Y,d_y) espais mètrics, $E \subseteq X$, $f : E \longrightarrow Y$ una funció i $p \in E$. Diem que f és contínua a p si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in E \text{ complint } d_x(x,p) < \delta \text{ és } d_y(f(x),f(p)) < \varepsilon$$

També direm que f és contínua a $F \subseteq E$ si ho és a tots els punts de F.

Observació 2.1.11. Destaquem dues diferències entre aquesta definició i la de límit d'una funció.

En primer lloc, a la Definició 2.1.5 s'exigeix que $p \in E'$, ja que el concepte de límit té sentit per aquest tipus de punts. Però a la de continuïtat imposem que $p \in E$, perquè hem de poder prendre la imatge de p per f.

D'altra banda, notem que hem escrit $0 < d_x(x,p) < \delta$ i $d_x(x,p) < \delta$. La causa d'això és que ens interessa que funcions com $f(0) = 1$, $f(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tinguin límit 0 quan x tendeix cap a 0, però no siguin contínues.

No obstant, com a relació entre les dues definicions, tenim:

Proposició 2.1.12. *Siguin (X,d_x) i (Y,d_y) espais mètrics, $E \subseteq X$, $f : E \longrightarrow Y$ una funció i $p \in E \cap E'$. Aleshores f és contínua a p si, i només si, $\lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p)$.*

Demostració. $\Rightarrow$: immediat.
$\Leftarrow$: Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in E$ complint $0 < d_x(x,p) < \delta$ és $d_y(f(x),f(p)) < \varepsilon$. I també per a $x \in E$ tal que $d_x(x,p) = 0$, és $x = p$ i $d_y(f(x),f(p)) = 0 < \varepsilon$. □

Proposició 2.1.13. *Siguin $(X,d_x),(Y,d_y),(Z,d_z)$ espais mètrics, $E \subseteq X$, $p \in E$, $f : E \longrightarrow Y$ i $g : f(E) \longrightarrow Z$ dues funcions contínues a p i $f(p)$, respectivament. Aleshores $g \circ f$ és contínua a p.*

Demostració. Tenim les següents hipòtesis:

(1) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tal que $\forall y \in f(E)$, si $d_y(y,f(p)) < \delta$, llavors $d_z(g(y),g(f(p))) < \varepsilon$.

(2) $\forall \delta > 0 \; \exists \mu > 0$ tal que $\forall x \in E$, si $d_x(x,p) < \mu$, llavors $d_y(f(x),f(p)) < \delta$.

Sigui $\varepsilon > 0$, podem prendre el $\delta > 0$ donat per (1) i el $\mu > 0$ donat per (2). Aleshores si $x \in E$, tenim:

$$d_x(x,p) < \mu \overset{(2)}{\Rightarrow} d_y(f(x),f(p)) < \delta \overset{(1)}{\Rightarrow} d_z(g(f(x)),g(f(p))) < \varepsilon$$

□

Acabem aquesta secció amb unes definicions i observacions.

Definició 2.1.14. Siguin (X, d) un espai mètric, $E \subseteq X$ i $p \in E$.
Direm que p és un *punt d'acumulació de* E si per a tot $\varepsilon > 0$ és $E \cap [B(p, \varepsilon) \setminus \{p\}] \neq \varnothing$.
Direm que p és un *punt aïllat de* E si no és d'acumulació, és a dir, si $\exists \delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \cap E = \{p\}$.

Observació 2.1.15. Notem que tota funció és contínua als punts aïllats. En efecte, si $p \in E$ és un punt aïllat de E i $\varepsilon > 0$, aleshores $\exists \delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \cap E = \{p\}$. Per tant, per a tot $x \in E$ complint $d_x(x, p) < \delta$, i.e., $x \in B(p, \delta) = \{p\}$, és $d_y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon$.

Exercicis

2.1. Siguin $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ l'espai mètric de l'Exemple 2.1.2, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ l'espai mètric habitual dels reals i

$$\begin{aligned} F : \mathcal{C}([0, 1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

Demostreu que F és contínua a tot $\mathcal{C}([0, 1])$.

2.2. Sigui $(x_n)_n$ una successió a un espai mètric (X, d). Demostreu que $(x_n)_n$ convergeix cap a $x \in X$ si, i només si, tota parcial de $(x_n)_n$ convergeix cap a x.

2.3. Sigui $(x_n)_n$ una successió de Cauchy a un espai mètric (X, d). Demostreu que si la successió $(x_n)_n$ té una parcial convergent cap a $x \in X$, aleshores $(x_n)_n$ convergeix cap a x.

2.4. Sigui $(x_n)_n$ una successió a un espai mètric (X, d).

(a) Demostreu que si $(x_n)_n$ convergeix cap a $x \in X$, llavors les successions $(x_{2n})_n$ i $(x_{2n+1})_n$ també convergeixen cap a x.

(b) Si $(x_{2n})_n$ i $(x_{2n+1})_n$ són convergents es pot assegurar que $(x_n)_n$ és convergent?

(c) Si $(x_{2n})_n$ i $(x_{2n+1})_n$ són convergents cap a $x \in X$, demostreu que $(x_n)_n$ també ho és.

(d) Més generalment, demostreu que si existeixen dues successions parcials $(x_{\sigma(n)})_n$, $(x_{s(n)})_n$ que convergeixen cap a $x \in X$ i compleixen $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, aleshores $(x_n)_n$ també convergeix cap a x.

2.5. Sigui $(x_n)_n$ una successió a un espai mètric (X, d) de manera que les parcials $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$, $(x_{3n})_n$ convergeixen. Demostreu que $(x_n)_n$ convergeix.

2.6. Sigui $(x_n)_n$ una successió a un espai mètric (X, d).

(a) Si tota parcial de $(x_n)_n$ té una parcial convergent, podem afirmar que $(x_n)_n$ és convergent?

(b) Sigui $x \in X$. Demostreu que si tota parcial de $(x_n)_n$ té una parcial que convergeix cap a $x \in X$, aleshores $(x_n)_n$ té límit x.

2.7. Sigui $(x_n)_n$ una successió a un espai mètric (X, d) i sigui $\varepsilon_n := d(x_n, x_{n+1})$, per a $n \geq 0$.

(a) Demostreu que si $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$, llavors $(x_n)_n$ és una successió de Cauchy.

(b) Demostreu que si $(x_n)_n$ és convergent i $\lim_n x_n = x \in X$, llavors per a tot $n \geq 0$, és:

$$d(x, x_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k$$

2.8. Siguin $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ dues successions a un espai mètric (X, d). Demostreu que:

(a) Si $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ són de Cauchy, aleshores la successió de $\mathbb{R}$ $(d(a_n, b_n))_n$ té límit.

(b) Si $(a_n)_n$ és de Cauchy i $\lim_n d(a_n, b_n) = 0$, aleshores $(b_n)_n$ és de Cauchy.

(c) Si $(a_n)_n$ és de Cauchy i $\lim_n d(a_n, b_n) = 0$, aleshores $(b_n)_n$ convergeix cap a $l \in X$ si, i només si, $(a_n)_n$ convergeix cap a l.

2.2 Conjunts oberts i tancats. Topologia i espais mètrics

En aquesta secció construirem una topologia a partir d'un espai mètric arbitrari i donarem alguns resultats relatius a aquests conceptes.

Definició 2.2.1. Siguin (X, d) un espai mètric, $E \subseteq X$ i $p \in E$. Direm que p és un punt interior de E si $\exists \delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subseteq E$.
Denotarem per $\overset{\circ}{E}$ al conjunt dels punts interiors de E.

Definició 2.2.2. Siguin (X, d) un espai mètric i $E \subseteq X$.

(1) Direm que E és obert si $E = \overset{\circ}{E}$.

(2) Direm que E és tancat si $E^{\mathsf{C}} := X \setminus E$ és obert.

Exemple 2.2.3. Siguin (X, d) un espai mètric, $E \subseteq X$, $p \in E$ i $r > 0$.
Aleshores $B(p, r)$ és obert. En efecte, si $x \in B(p, r)$, hem de definir un cert $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq B(p, r)$. Prendrem $\delta := r - d(x, p) > 0$. Veiem ara la inclusió: sigui $y \in B(x, \delta)$, llavors $d(p, y) \leq d(p, x) + d(x, y) < r - \delta + \delta = r$, i.e., $y \in B(p, r)$.

D'altra banda, $\bar{B}(p, r)$ és tancat. Notem primer que $\bar{B}(p, r)^{\mathsf{C}} = \{x \in X : d(p, x) > r\}$. Sigui $x \in \bar{B}(p, r)^{\mathsf{C}}$, hem de veure que existeix $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq \bar{B}(p, r)^{\mathsf{C}}$. Prendrem $\delta := d(x, p) - r > 0$. Veiem ara la inclusió: sigui $y \in B(x, \delta)$, llavors $d(x, y) < \delta = d(x, p) - r \leq d(x, y) + d(y, p) - r$, és a dir, $d(y, p) > r$, d'on es dedueix $y \in \bar{B}(p, r)^{\mathsf{C}}$.

Finalment, notem que tant $\varnothing$ com X són oberts. Per tant, també es té que $\varnothing$ i X són tancats.

Proposició 2.2.4. *Sigui (X, d) un espai mètric.*

(a) *Si $\{E_i\}_{i \in I}$ és una família d'oberts, llavors $\bigcup_{i \in I} E_i$ és obert.*

(b) *Si $\{E_i\}_{i \in I}$ és una família d'oberts, llavors $\bigcap_{i \in I} E_i$ no té perquè ser obert.*

(c) *Si A, B són oberts, llavors $A \cap B$ és obert. Com a conseqüència, la intersecció finita d'oberts és un obert.*

Demostració. (a) Sigui $x \in \bigcup_{i\in I} E_i$, aleshores $x \in E_j$ per algun $j \in I$. Com que E_j és obert, tenim que existeix $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subseteq E_j \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i$.

(b) És suficient posar un exemple. A $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ tenim que $\{(-1/n, 1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una família d'oberts, però $\bigcap_{i\in I}(-1/n, 1/n) = \{0\}$ no és obert.

(c) Sigui $x \in A \cap B$, llavors

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \Rightarrow \exists \delta_A > 0 \text{ tal que } B(x,\delta_A) \subseteq A \\ x \in B \Rightarrow \exists \delta_B > 0 \text{ tal que } B(x,\delta_B) \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow B(x, \min\{\delta_A, \delta_B\}) \subseteq A \cap B$$

□

Com a conseqüència gairebé immediata d'aquesta proposició:

Corol·lari 2.2.5. *Sigui (X,d) un espai mètric.*

(a) *Si $\{E_i\}_{i\in I}$ és una família de tancats, llavors $\bigcap_{i\in I} E_i$ és tancat.*

(b) *Si $\{E_i\}_{i\in I}$ és una família de tancats, llavors $\bigcup_{i\in I} E_i$ no té perquè ser tancat.*

(c) *Si A, B són tancats, llavors $A \cup B$ és tancat. Com a conseqüència, la unió finita de tancats és un tancat.*

Demostració. Una possible prova es basa en les propietats que trobem en prendre complementaris de conjunts. Més precisament, en les igualtats

$$E = \left(E^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}} \qquad \bigcup_{i\in I} E_i^{\mathsf{C}} = \left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)^{\mathsf{C}} \qquad \bigcap_{i\in I} E_i^{\mathsf{C}} = \left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)^{\mathsf{C}}$$

□

Aquestes propietats seran molt útils per provar altres resultats que involucrin unió o intersecció d'oberts o tancats.

Com a conseqüència de la Proposició 2.2.4 i del fet que $\varnothing$ i X siguin oberts, tenim que el conjunt de tots els oberts de (X,d), que anomenarem τ_X, és una topologia sobre X.

Però això no és tot. Les funcions contínues entre espais topològics tenen una determinada definició i seria interessant que aquesta fos equivalent a la Definició 2.1.10. En efecte, es té el següent:

Teorema 2.2.6 (Caracterització de la continuïtat per oberts)**.** *Siguin $(X,d_x), (Y,d_y)$ espais mètrics, i $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació. Aleshores f és contínua a X si, i només si, per a tot $V \in \tau_Y$ és $f^{-1}(V) \in \tau_X$.*

Demostració. $\Rightarrow$: Suposem que f és contínua a X i que $V \in \tau_Y$. Volem veure que $f^{-1}(V) \in \tau_X$. Sigui $p \in f^{-1}(V)$, aleshores $f(p) \in V$. Com que V és obert, tenim que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(f(p),\varepsilon) \subseteq V$.
D'altra banda, com que f és contínua a p, tenim que per aquest $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in X, d_x(x,p) < \delta$ és $d_y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Afirmem ara que $B(p,\delta) \subseteq f^{-1}(V)$. En efecte, si $x \in B(p,\delta)$, llavors $d_x(x,p) < \delta$ i, per tant, $d_y(f(x), f(p)) < \varepsilon$, i.e., $f(x) \in B(f(p),\varepsilon) \subseteq V$, o sigui, $x \in f^{-1}(V)$.

$\Leftarrow$: Sigui $p \in X$ i $\varepsilon > 0$. Considerem $V := B(f(p), \varepsilon) \in \tau_Y$. Per hipòtesi, és $f^{-1}(V) \in \tau_X$ i, com que $p \in f^{-1}(V)$, tenim que existeix $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$. Tenim que per a tot $x \in X$ és:

$$d_x(x, p) < \delta \Rightarrow x \in B(p, \delta) \Rightarrow x \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \in V \Rightarrow d_y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

□

Corol·lari 2.2.7 (Caracterització de la continuïtat per tancats)**.** *Siguin* $(X, d_x), (Y, d_y)$ *espais mètrics, i* $f : X \longrightarrow Y$ *una aplicació. Aleshores* f *és contínua a* X *si, i només si, per a tot* $F \subseteq Y$ *tancat és* $f^{-1}(F) \subseteq X$ *tancat.*

Demostració. Immediat amb les igualtats

$$E = \left(E^{\complement}\right)^{\complement} \qquad f^{-1}\left(F^{\complement}\right) = f^{-1}(F)^{\complement}$$

□

Exercicis

2.9. Demostreu que $E = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : 0 < \inf_{x \in [0,1]} f(x) \leq \sup_{x \in [0,1]} f(x) < 1\}$ és obert a $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$.

2.10. Sigui $A \subseteq \mathbb{R}$ obert. Demostreu que per a cada $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, els conjunts $x + A := \{x + y : y \in A\}$ i $x \cdot A := \{x \cdot y : y \in A\}$ són oberts.

2.11. Un espai mètric (X, d) es diu *ultramètric* si per a tots $x, y, z \in X$ és

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

Sigui (X, d) un espai ultramètric. Proveu:

(a) Tota bola oberta de (X, d) és un conjunt tancat.

(b) Una successió $(a_n)_n$ és de Cauchy en (X, d) si, i només si, $\lim_{n \to +\infty} d(a_n, a_{n+1}) = 0$.

2.12. Es tracta de provar una generalització del Teorema dels Intervals Encaixats (cf.Teorema 1.6.2). Sigui (X, d) un espai mètric complet per successions. Per a un conjunt no buit $E \subseteq X$ definim el seu diàmetre com $\operatorname{diam} E = \sup_{x,y \in E} d(x, y)$. Suposem que $(E_n)_n$ és una successió de subconjunts tancats i no buits de X que compleix $E_{n+1} \subsetneq E_n$ per a cada $n \geq 1$ i $\operatorname{diam}(E_n) \xrightarrow{n} 0$.

(a) Suposem que $x_n \in E_n$ per a $n \geq 1$. Demostreu que la successió $(x_n)_n$ és de Cauchy.

(b) Demostreu que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \neq \varnothing$. (Pista: Utilitzeu una successió de l'apartat (a) i el Lema 2.3.10)

(c) Demostreu que existeix $x \in X$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\}$.

2.13. Sigui $X = (0, +\infty)$. Definim

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \end{aligned}$$

(a) Demostreu que (X, d) és un espai mètric.

(b) Proveu que la successió $(n)_n$ és de Cauchy a (X, d). És convergent a (X, d)?

(c) És la successió $(1/n)_n$ de Cauchy a (X, d)?

(d) Demostreu que si $(a_n)_n \subseteq X$, llavors $(a_n)_n$ convergeix a X si, i només si, convergeix a (X, d'), on $d'(x, y) := |x - y|$ i, en tal cas, els límits coincideixen.

2.3 Compacitat

Definició 2.3.1. Siguin (X, d_x) un espai mètric i $E \subseteq X$. Direm que E és *acotat* si existeixen $p \in X$ i $r > 0$ tals que $E \subseteq B(p, r)$.
Si (Y, d_y) és un espai mètric i $f : E \longrightarrow Y$ és una funció, llavors direm que f és *acotada* si $f(E) \subseteq Y$ és acotat.

Definició 2.3.2. Siguin (X, d) un espai mètric i $K \subseteq X$. Direm que K és compacte si per a tot recobriment per oberts se'n pot extreure un recobriment finit. És a dir, si per a tota família d'oberts $\{G_i\}_{i\in I}$ complint $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$, existeix $J \subseteq I$ finit tal que $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} G_i$

Teorema 2.3.3. *Siguin (X, d) un espai mètric i $K \subseteq X$ un compacte. Aleshores K és tancat i acotat.*

Demostració. Comencem veient que K és acotat. Prenem $p \in X$ qualsevol. Aleshores $K \subseteq \bigcup\limits_{r>0} B(p, r)$, és a dir, $\{B(p, r)\}_{r\in\mathbb{R}_{>0}}$ és un recobriment per oberts de K. Per tant, existeix $J \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ finit tal que $K \subseteq \bigcup\limits_{r\in J} B(p, r)$. Per ser J finit, podem posar $R := \max J$ i tenim $\bigcup\limits_{r\in J} B(p, r) = B(p, R)$. En definitiva, $K \subseteq B(p, R)$, com volíem veure.

Veiem ara que K és tancat, és a dir, que K^{C} és obert. Sigui $p \in K^{\mathsf{C}}$, volem provar que p és interior, o sigui, que $\exists\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subseteq K^{\mathsf{C}}$.
Considerem el recobriment per oberts de K $\{B(x, \frac{1}{2}d(x, p))\}_{x\in K}$. Com que K és compacte, existeix $J \subseteq K$ finit tal que $K \subseteq \bigcup\limits_{x\in J} B(x, \frac{1}{2}d(x, p))$. Posem $\delta := \min\limits_{x\in J} \frac{1}{2}d(x, p)$.
Afirmem que $\bigcup\limits_{x\in J} B(x, \frac{1}{2}d(x, p)) \cap B(p, \delta) = \varnothing$. En efecte, si $y \in \bigcup\limits_{x\in J} B(x, \frac{1}{2}d(x, p)) \cap B(p, \delta) = \varnothing$, aleshores

$$\left.\begin{array}{l} \exists x \in J \text{ tal que } y \in B(x, \frac{1}{2}d(x, p)) \Rightarrow d(x, y) < d(x, p)/2 \\ y \in B(p, \delta) \Rightarrow d(p, y) < \delta = \min\limits_{x\in J} \frac{1}{2}d(x, p) \leq \frac{1}{2}d(x, p) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x, p) \leq d(x, y) + d(y, p) < \frac{1}{2}d(x, p) + \frac{1}{2}d(x, p) = d(x, p), \text{ contradicció}$$

Finalment, això implica que $B(p, \delta) \subseteq \left[\bigcup\limits_{x\in J} B(x, \frac{1}{2}d(x, p))\right]^{\mathsf{C}} \subseteq K^{\mathsf{C}}$, com volíem veure. $\square$

Proposició 2.3.4. *Siguin (X, d_x) un espai mètric on X és compacte, (Y, d_y) un espai mètric qualsevol i $f : X \longrightarrow Y$ una funció contínua a X. Aleshores $f(X) \subseteq Y$ és compacte.*

Demostració. Sigui $\{G_i\}_{i\in I}$ una família d'oberts de Y tals que $f(X) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$, aleshores $X \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(G_i)$. Com que f és contínua, $\{f^{-1}(G_i)\}_{i\in I}$ és un recobriment per oberts de X. Per tant, existeix $J \subseteq I$ finit tal que $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} f^{-1}(G_i) = f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i\in J} G_i\right)$ i, finalment, $f(X) \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} G_i$ $\square$

Observació 2.3.5. Notem que aquest resultat no és molt útil a la pràctica, ja que s'exigeix que f sigui contínua a tot X i que X sigui compacte (cosa que gairebé mai és certa). A continuació intentem generalitzar aquesta proposició.

Lema 2.3.6. *Siguin (X, d) un espai mètric i $K \subseteq X$ un compacte, aleshores K és compacte a l'espai mètric $(K, d_{|K\times K})$.*

Demostració. Sigui $\{G_i\}_{i\in I}$ un recobriment per oberts de K a $(K, d_{|K\times K})$. Afirmem que $G_i \cup K^{\mathsf{C}}$ és obert a (X, d) per a cada $i \in I$. En efecte, si $p \in G_i \cup K^{\mathsf{C}}$, tenim dos casos:

(1) $p \in K^{\mathsf{C}}$. Com que K^{C} és obert, existeix $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subseteq K^{\mathsf{C}} \subseteq G_i \cup K^{\mathsf{C}}$.

(2) $p \in G_i$. Com que G_i és obert a $(K, d_{|K\times K})$, existeix $\delta > 0$ tal que $B_K(p, \delta) := \{x \in K : d(x, p) < \delta\} \subseteq G_i$. Llavors $B(p, \delta) = B_K(p, \delta) \cup \{x \in K^{\mathsf{C}} : d(x, p) < \delta\} \subseteq G_i \cup K^{\mathsf{C}}$.

Per tant, $\{G_i \cup K^{\mathsf{C}}\}_{i\in I}$ és un recobriment per oberts de K a (X, d), amb la qual cosa, existeix $J \subseteq I$ finit tal que $K \subseteq \bigcup_{i\in J}(G_i \cup K^{\mathsf{C}}) = \left(\bigcup_{i\in J} G_i\right) \cup K^{\mathsf{C}}$. Finalment, d'aquí es dedueix que $K \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$. □

Teorema 2.3.7 (Generalització de 2.3.4)**.** *Siguin (X, d), (Y, d_y) espais mètrics, $K \subseteq X$ compacte i $f : K \longrightarrow Y$ una funció contínua a K. Aleshores $f(K) \subseteq Y$ és compacte.*

Demostració. Com que f és contínua a K considerant-la a l'espai mètric (X, d), tenim que f és contínua a K considerant-la a l'espai mètric $(K, d_{|K\times K})$. Pel lema anterior, K és compacte a $(K, d_{|K\times K})$ i per la Proposició 2.3.4, $f(K) \subseteq Y$ és compacte. □

Corol·lari 2.3.8. *Siguin (X, d_x), (Y, d_y) espais mètrics, $K \subseteq X$ un compacte i $f : K \longrightarrow Y$ una funció contínua a K. Aleshores la funció f és acotada.*

Demostració. Pel Teorema 2.3.7, és $f(K) \subseteq Y$ compacte i, pel Teorema 2.3.3, és $f(K)$ acotat. □

Ens disposem ara a demostrar el Teorema de Weierstrass i alguns altres resultats notables.

Lema 2.3.9. *Siguin (X, d) un espai mètric, $K \subseteq X$ un compacte i $F \subseteq K$ un tancat. Aleshores F és compacte.*

Demostració. Sigui $\{G_i\}_{i\in I}$ un recobriment per oberts de F, aleshores tenim $K \subseteq F^{\mathsf{C}} \cup F \subseteq F^{\mathsf{C}} \cup \left(\bigcup_{i\in I} G_i\right)$, o sigui, $\{F^{\mathsf{C}}\} \cup \{G_i\}_{i\in I}$ és un recobriment per oberts de K. Això implica que existeix $J \subseteq I$ finit tal que $K \subseteq F^{\mathsf{C}} \cup \left(\bigcup_{i\in J} G_i\right)$. Com que $F \subseteq K$, tenim $F \subseteq F^{\mathsf{C}} \cup \left(\bigcup_{i\in J} G_i\right)$, i.e., $F \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$, com volíem veure. □

Lema 2.3.10. *Siguin (X, d) un espai mètric i $F \subseteq X$. Aleshores F és tancat si, i només si, tota successió convergent de F té límit en F.*

Demostració. $\Rightarrow$: Per reducció a l'absurd. Suposem que F és tancat i que $\exists (x_n)_n$ successió de F tal que $(x_n)_n \xrightarrow{n} x \in F^{\mathsf{C}}$. Com que F^{C} és obert, tenim que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq F^{\mathsf{C}}$. Aplicant la definició de límit a la successió $(x_n)_n$, tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $d(x_n, x) < \varepsilon$, o sigui, $x_n \in B(x, \varepsilon) \subseteq F^{\mathsf{C}}$. Això contradiu el fet que $(x_n)_n$ és successió de F.

$\Leftarrow$: Per reducció a l'absurd. Suposem que F no és tancat. Llavors $F^{\complement}$ no és obert, és a dir, existeix $x \in F^{\complement}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ és $B(x,\varepsilon) \nsubseteq F^{\complement}$, o sigui, $B(x,\varepsilon) \cap F \neq \varnothing$.
Per a cada $n \in \mathbb{N}$ considerem els conjunts $A_n := B(x, 1/n) \cap F \neq \varnothing$. L'axioma de l'elecció ens permet prendre una successió $(x_n)_n$ de F tal que $x_n \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Per arribar a una contradicció serà suficient provar que x és el límit de $(x_n)_n$, ja que tindríem $x \in F \cap F^{\complement} = \varnothing$. En efecte, si $\varepsilon > 0$, per l'arquimedianeïtat de $\mathbb{R}$, podem prendre $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\varepsilon$, o sigui, $1/n_0 < \varepsilon$. Per a tot $n \geq n_0$ tenim llavors:

$$d(x_n, x) < 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$$

On a la primera desigualtat s'ha utilitzat que $x_n \in B(x, 1/n)$. $\square$

Teorema 2.3.11 (Weierstrass)**.** *Siguin (X,d) un espai mètric, $K \subseteq X$ compacte i $f : K \to \mathbb{R}$ una funció contínua a K. Aleshores $f(K)$ té màxim i mínim.*

Demostració. Pel Teorema 2.3.7, tenim que $f(K)$ és compacte i, en particular, és tancat i acotat. Per l'axioma del suprem o Teorema 1.6.3, tenim que existeixen l'ínfim i el suprem de $f(K)$. A continuació provarem només el cas del màxim, ja que l'ínfim és anàleg.
Posem $M := \sup f(K)$. Aleshores $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in K$ tal que $M - 1/n < f(x_n) \leq M$. Això i l'axioma de l'elecció ens permeten construir una successió $(x_n)_n$ de K que compleix la propietat anterior. Per la Regla del Sandwich, $(f(x_n))_n \xrightarrow{n} M$. Com que $f(K)$ és tancat, pel Lema 2.3.10, tenim que $M \in f(K)$, com volíem veure. $\square$

Proposició 2.3.12 (Propietat de la intersecció finita)**.** *Siguin (X,d) un espai mètric i $\{K_i\}_{i \in I}$ una família de compactes a X tal que $\forall J \subseteq I$ finit és $\bigcap_{i\in J} K_i \neq \varnothing$. Aleshores $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \varnothing$.*

Demostració. Prenem $j \in I$ qualsevol. Suposem, amb l'objectiu d'arribar a una contradicció, que $\forall x \in K_j$ és $x \notin \bigcap_{i \in I} K_i$. Per tant, $K_j \subseteq \bigcup_{i \in I} K_i^{\complement}$. Com que els $K_i^{\complement}$ són oberts, tenim que existeix $J \subseteq I$ finit tal que $K_j \subseteq \bigcup_{i \in J} K_i^{\complement}$, o sigui, $\left(\bigcap_{i \in J} K_i\right) \cap K_j = \varnothing$, contradicció. $\square$

Teorema 2.3.13. *Siguin (X, d_x) un espai mètric on X és compacte, (Y, d_y) un espai mètric qualsevol i $f : X \longrightarrow Y$ una funció bijectiva i contínua a X. Aleshores $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ també és contínua.*

Demostració. Pel Corol·lari 2.2.7, serà suficient veure que per a tot tancat $F \subseteq X$ és $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F) \subseteq Y$ tancat.
Com que $F \subseteq X$ és tancat i X és compacte tenim, pel Lema 2.3.9, que F és compacte i, pel Teorema 2.3.7, $f(F) \subseteq Y$ és compacte, en particular, tancat. $\square$

Tot i que no el demostrarem[2], és convenient incloure el següent resultat.

Teorema 2.3.14 (Caracterització dels compactes per successions)**.** *Siguin (X,d) un espai mètric i $K \subseteq X$. Aleshores K és compacte si, i només si, per a tota successió de K existeix una parcial convergent a un punt de K.*

Acabem aquesta secció caracteritzant els compactes de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ i enunciant el resultat anàleg per a l'espai mètric $(\mathbb{R}^n, d)$ de l'Exemple 2.1.2.

Proposició 2.3.15. *Siguin $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, aleshores:*

(a) *$[a,b]$ és compacte a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.*

[2]Les proves es poden trobar, per exemple, a `http://www.um.es/docencia/pherrero/compactos.pdf`

(b) *$K \subseteq \mathbb{R}$ és compacte si, i només si, és tancat i acotat.*

Demostració. (a) Suposem el contrari. Aleshores existeix un recobriment per oberts $\{G_i\}_{i\in I}$ de $[a,b]$ tal que $\forall J \subseteq I$ finit és $[a,b] \not\subseteq \bigcup\limits_{i\in J} G_i$.

Definim la successió d'intervals de $(I_n)_n$ de $\mathbb{R}$ de forma recursiva per:

$$I_0 = [a_0, b_0] := [a,b] \text{ i, per a } n \geq 0,$$

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}], & \text{si } \forall J \subseteq I \text{ finit, és } [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \not\subseteq \bigcup\limits_{i\in J} G_i \\ [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n], & \text{si } \exists J \subseteq I \text{ finit tal que } [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} G_i \end{cases}$$

Es pot provar fàcilment per inducció que:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ és $I_n \subseteq I_{n+1}$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ és I_n tancat.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n no admet un subrecobriment finit de $\{G_i\}_{i\in I}$.

(4) $(\text{long}(I_n))_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n} 0$.

Pel Teorema del Intervals Encaixats, existeix $x \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$. En particular, és $x \in [a,b] \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$. Per tant, existeix $j \in I$ tal que $x \in G_j$. Com que G_j és obert, existeix $\delta > 0$ tal que $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_j$.
D'altra banda, com que $\text{long}(I_n) \longrightarrow 0$, tenim que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $b_n - a_n < \varepsilon$. Escollint $\varepsilon := \delta$, tenim $b_{n_0} - a_{n_0} < \delta$. Afirmem que $I_{n_0} \subseteq (x-\delta, x+\delta)$.
En efecte, donat $y \in I_{n_0}$, com que també és $x \in I_{n_0}$, tenim $|y-x| \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \delta$, o sigui, $y \in (x-\delta, x+\delta)$.
Per tant, $I_{n_0} \subseteq (x-\delta, x+\delta) \subseteq G_j$, amb la qual cosa I_{n_0} admetria un subrecobriment finit, contradient (3).

(b) La implicació d'esquerra a dreta és el Teorema 2.3.3. Pel recíproc, considerem $K \subseteq \mathbb{R}$ tancat i acotat. Aleshores existeix un interval $[a,b]$ que el conté. Com que $[a,b]$ és compacte, tenim, pel Lema 2.3.9, que K és compacte.

□

El resultat següent és una generalització la proposició anterior que no demostrarem en aquests apunts. [3]

Teorema 2.3.16 (Heine-Borel)**.** *Sigui $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Aleshores K és compacte a $(\mathbb{R}^n, d)$ (cf. Exemple 2.1.2) si, i només si, K és tancat i acotat.*

Exercicis

2.14. Sigui $B \subseteq \mathbb{R}$ un tancat i $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacte. Demostreu que el conjunt $B + K := \{x + y : x \in B, y \in K\}$ és tancat.

2.15. Sigui (E,d) un espai mètric.

(a) Demostreu que si $(x_n)_n \subseteq E$ convergeix cap a $x \in E$, llavors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\} \cup \{x\} \subseteq E$ és compacte.

[3] Es pot consultar [Rud, pàg.43] o [Ross, pàg.90]. A totes dues es fa una generalització de la demostració de la Proposició 2.3.15.

(b) Siguin (E', d') un espai mètric i $f : E \longrightarrow E'$ una aplicació que compleix que per a tot compacte $K \subseteq E$, és $f_{|K}$ contínua a K. Demostreu que f és contínua a E.

2.16. Proveu el següent cas particular del Teorema 2.3.14. Sigui $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacte i $(x_n)_n \subseteq K$, aleshores existeixen un element $x \in K$ i una parcial $(x_{n_k})_k \vdash (x_n)_n$ tals que $\lim\limits_k x_{n_k} = x$.

2.4 Continuïtat uniforme

Introduirem ara un concepte més fort que la continuïtat que ens permetrà formular resultats força interessants en els següents capítols: la continuïtat uniforme. És convenient, però, posar totes dues definicions seguides per tal de poder-les comparar còmodament. Comencem recordant la de continuïtat.

Definició 2.4.1. Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$ i $f : E \longrightarrow Y$ una funció. Diem que f és *contínua* (a E) si

$$\forall p \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall q \in E \text{ complint } d_x(p, q) < \delta \text{ és } d_y(f(p), f(q)) < \varepsilon$$

Definició 2.4.2. Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$ i $f : E \to Y$ una funció. Diem que f és *uniformement contínua* (a E) si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall p, q \in E \text{ complint } d_x(p, q) < \delta \text{ és } d_y(f(p), f(q)) < \varepsilon$$

A més a més, diem que f és uniformement contínua a $F \subseteq E$ si $f_{|F}$ és uniformement contínua.

Intuïtivament, si $Y = \mathbb{R}$, podem pensar que les funcions uniformement contínues són aquelles que són contínues i no creixen ni decreixen molt ràpidament. El següent exemple posa això de manifest.

Exemple 2.4.3. La funció $f(x) = 1/x$ no és uniformement contínua a $(0, 1]$. En efecte, per a $\varepsilon = 1$, podem definir $x_n := \frac{1}{n}$ i $y_n := \frac{1}{2n}$. Notem que $|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n} 0$, però $|f(x_n) - f(y_n)| = n \geq 1 = \varepsilon$.
Això ja és suficient, ja que tenim que $\forall \delta > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que posant $p := x_{n_0}$ i $q := y_{n_0}$ és $|p - q| < \delta$, però $|f(p) - f(q)| \geq \varepsilon$.
El fet de considerar dues successions que s'apropen, però tals que les seves imatges per f s'allunyen és molt habitual per demostrar que una funció no és uniformement contínua. La proposició següent ho generalitza.

Proposició 2.4.4. *Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$ i $f : E \to Y$ una funció. Si existeixen successions $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq E$ tals que $d_x(x_n, y_n) \xrightarrow{n} 0$ i $d_y(f(x_n), f(y_n)) \overset{n}{\nrightarrow} 0$, aleshores f no és uniformement contínua a E.*

Demostració. Per les hipòtesis, tenim:

(1) $d_y(f(x_n), f(y_n)) \overset{n}{\nrightarrow} 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0$ complint $d_y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.

(2) $d_x(x_n, y_n) \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \forall \delta > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$ és $d_x(x_n, y_n) < \delta$.

Triem el $\varepsilon > 0$ donat per (1). Sigui $\delta > 0$, prenem el $n_1 \in \mathbb{N}$ donat per (2). Posem $n_0 := n_1$ a (1) i obtenim un natural $n \geq n_0 = n_1$ tal que $d_x(x_n, y_n) < \delta$ i $d_y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$, la qual cosa és el contrari de la Definició 2.4.2. $\square$

La proposició anterior ens proporciona un mètode per demostrar que certes funcions no són uniformement contínues. Per veure el contrari, és a dir, per provar que una determinada funció sí que ho és, ens servirà el següent teorema.

Teorema 2.4.5. *Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $K \subseteq X$ un compacte i $f : K \to Y$ una funció contínua a K. Aleshores f és uniformement contínua a K.*

Demostració. Sigui $\varepsilon > 0$. Per hipòtesi, tenim que $\forall p \in K\ \exists \delta_p > 0$ tal que $\forall q \in K \cap B(p, \delta_p)$ és $d_y(f(p), f(q)) < \varepsilon/2$. L'axioma de l'elecció ens permet prendre un $\delta_p > 0$ concret per a cada $p \in K$ que compleix la propietat anterior.

Notem que $\{B(p, \frac{\delta_p}{2})\}_{p \in K}$ és un recobriment per oberts de K. Per tant, existeix $J \subseteq K$ finit tal que $K \subseteq \bigcup\limits_{p \in J} B(p, \frac{\delta_p}{2})$. Definim $\delta := \min\limits_{p \in J}\{\delta_p/2\}$.

Siguin $x, y \in K$ tals que $d_x(x, y) < \delta$, serà suficient veure que $d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Com que $x \in K \subseteq \bigcup\limits_{p \in J} B(p, \frac{\delta_p}{2})$, tenim que $\exists p \in J$ tal que $x \in B(p, \frac{\delta_p}{2})$, o sigui, $d_x(x, p) < \delta_p/2 < \delta_p$ i, per tant, $d_y(f(x), f(p)) < \varepsilon/2$.

D'altra banda, $d_x(y, p) \leq d_x(x, y) + d_x(x, p) < \delta + \delta_p/2 \leq \delta_p/2 + \delta_p/2 = \delta_p$. Per tant, $d_y(f(y), f(p)) < \varepsilon/2$.

En definitiva, $d_y(f(x), f(y)) \leq d_y(f(x), f(p)) + d_y(f(p), f(y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. □

Exercicis

2.17. Sigui $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua i acotada a $(0, 1)$. Definim la funció $g : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per $g(x) = x(1-x)f(x)$. Demostreu que g és uniformement contínua a $(0, 1)$.

2.18. Demostreu que:

(a) $f(x) = x^2$ no és uniformement contínua a $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = 1/x$ és uniformement contínua a $[1, +\infty)$ i no ho és a $(0, 1)$.

(c) $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ és uniformement contínua a $\mathbb{R}$.

2.19. Sigui $f(x) = \sin x^2$, per a $x \in \mathbb{R}$. Estudieu la continuïtat uniforme de f a $\mathbb{R}$.

2.20. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + x^2} + \dfrac{y}{1 + y^2}$. Estudieu la continuïtat uniforme de f a $\mathbb{R}^2$.

2.21. Sigui $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció uniformement contínua a $[0, +\infty)$ i $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció Riemann integrable a $[0, 1]$. Demostreu que la funció

$$F(x) = \int_0^1 f(x + t)g(t)dt$$

és uniformement contínua a $[0, +\infty)$.

2.22. Sigui $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostreu que la funció

$$\begin{aligned} d(\cdot, F) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, F) := \inf\{||x - y|| : y \in F\} \end{aligned}$$

és contínua a $\mathbb{R}^n$.

(a) Sigui $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt compacte. Demostreu que la funció $d(\cdot, K)$ és uniformement contínua.

(b) Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua i sigui $\delta > 0$. Definim $K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq \delta\}$. Demostreu que f és uniformement contínua a K_δ.

2.23. Sigui $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval no trivial complint que totes les funcions contínues a I són uniformement contínues a I.

(a) Demostreu que I és tancat.

(b) Demostreu que I és acotat.

(Indicació: En cadascun dels apartats suposeu el contrari)

2.24. Sigui $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació.

(a) Sigui $\delta > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Per a cada $x \geq 0$ amb $n\delta \leq x < (N+1)\delta$, comproveu que

$$|f(x) - f(0)| \leq \sum_{k=1}^{N} |f(k\delta) - f((k-1)\delta)| + |f(x) - f(N\delta)|$$

(b) Demostreu que si f és uniformement contínua, llavors existeixen $A, B > 0$ tals que $|f(x)| \leq A + Bx$ per a tot $x \in [0, +\infty)$.

(c) Deduïu que un polinomi P és uniformement continu a $[0, +\infty)$ si, i només si, $\deg P \leq 1$.

2.25. Siguin (E, d) un espai mètric, $f : E \longrightarrow E$ una funció uniformement contínua i $(x_n)_n \subseteq E$ una successió de Cauchy. Demostreu que $(f(x_n))_n \subseteq E$ és també de Cauchy.

2.26. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suposem que existeixen els límits $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i són finits. Demostreu que f és uniformement contínua a $\mathbb{R}$.

2.27. Siguin $(X, d), (X', d')$ espais mètrics, $f : X \longrightarrow X'$ una funció uniformement contínua. Proveu que si $\varnothing \neq A, B \subseteq X$ compleixen que $d(A, B) = 0$, llavors $d(f(A), f(B)) = 0$. Recordeu que $d(A, B) = \inf\limits_{a \in A, b \in B} d(a, b)$.

2.28. Un subconjunt C d'un espai mètric (X, d) es diu que és totalment acotat en X quan, per a cada $r > 0$, podem recobrir C per un nombre finit de boles obertes de radi r.

(a) Siguin (E, d) i (F, d') espais mètrics i $f : E \longrightarrow F$ una funció uniformement contínua. Demostreu que si $A \subseteq E$ és totalment acotat a E, llavors $f(A) \subseteq F$ és també totalment acotat a F.

(b) Demostreu que a $\mathbb{R}$ amb la distància euclidiana, un subconjunt $A \subseteq \mathbb{R}$ és totalment acotat si, i només si, A és acotat.

Capítol 3

Successions i sèries de funcions

En aquest capítol considerarem successions i sèries de funcions en espais mètrics. No obstant, per estudiar la seva convergència es necessita especificar una distància entre funcions. Però com veurem a continuació, no hi ha una única manera de fer-ho.
A la primera secció definirem la *convergència puntual* i explicarem perquè no ens hauríem de conformar amb aquesta. A la segona secció definirem un concepte més fort: la *convergència uniforme*. A la resta del capítol enunciarem resultats sobre aquestes dues convergències.[1]

3.1 Convergència puntual

Definició 3.1.1. Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$, $(f_n)_n$ una successió de funcions amb $f_n : E \longrightarrow Y$ i $f : E \longrightarrow Y$ una funció. Diem que $(f_n)_n$ *convergeix puntualment* a f i escrivim $f_n \xrightarrow{n} f$ si és $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ per a tot $x \in E$.
A més a més, diem que $(f_n)_n$ convergeix puntualment a f en $F \subseteq E$ si $(f_{n|F})_n$ convergeix puntualment a $f_{|F}$.

Observacions 3.1.2.

- Per la unicitat del límit de successions, es té que el límit puntual també és únic.
- La condició $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ per a tot $x \in E$ equival a

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ és } d_y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

- Notem que el $n_0 \in \mathbb{N}$ pot dependre tant de $x \in E$ com del $\varepsilon > 0$.
- Habitualment és $Y = \mathbb{R}$, per tant, $d_y(f_n(x), f(x))$ s'escriuria com $|f_n(x) - f(x)|$.

Definició 3.1.3. Siguin (X, d_x) un espai mètric. Una *sèrie de funcions* és un parell de successions $(f_n)_n, (s_N)_n$ de funcions de $E \subseteq X$ en $\mathbb{R}$ que compleixen $s_N := \sum\limits_{n=0}^{N} f_n$.
Per simplicitat, escriurem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ per referir-nos a la sèrie.
Anomenarem *successió dels termes generals* a $(f_n)_n$ i *successió de les sumes parcials* a $(s_N)_N$.

Definició 3.1.4. Siguin (X, d_x) un espai mètric, $E \subseteq X$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ una sèrie de funcions de E en $\mathbb{R}$ i $s : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció. Diem que s és *suma puntual* de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ si la successió de sumes

[1] Potser convé passar-se per la secció 4.1 abans de començar aquest capítol.

parcials $(s_N)_N$ (amb $s_N := \sum_{n=0}^{N} f_n$) convergeix puntualment a s.
A més a més, diem que s és suma puntual de $(f_n)_n$ en $F \subseteq E$ si $s_{|F}$ és suma puntual de $(f_{n|F})_n$.

Observació 3.1.5. La condició $(s_N)_N$ convergeix puntualment a s es pot expressar com $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = s(x)\ \forall x \in E$ (cf. Definició 4.1.1).

Mantenint la notació de les definicions anteriors, notem que poden sorgir les següents preguntes naturals:

(1) Si les funcions f_n són contínues i $f_n \xrightarrow{n} f$, aleshores f és contínua? Notem que si $x_0 \in E \cap E'$, això implicaria que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, o sigui $\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$, és a dir, els límits commutarien.

(2) Si les funcions f_n i f són derivables i $f_n \xrightarrow{n} f$, aleshores $f'_n \xrightarrow{n} f'$?

(3) Si $X = [a, b]$, les funcions f_n són integrables segons Riemann i $f_n \xrightarrow{n} f$, aleshores f també és integrable Riemann i $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n = \int_a^b f$? Dit d'una altra manera, el límit es pot posar dins la integral?

La resposta a totes aquestes preguntes és *no*. A continuació, donem contraexemples per cada cas:

(1) Considerem les funcions

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

Totes són contínues però $f_n \xrightarrow{n} f$, on $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ i $f(1) = 1$. Notem que f no és contínua.

Un altre exemple (aquest amb sèries): considerem les funcions

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \end{aligned}$$

Com que totes són contínues, les sumes parcials de $(f_n)_n$ també ho seran. Ara bé,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 1 + x^2 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Notem que la funció suma puntual no és contínua.

(2) Considerem les funcions

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Notem que són derivables i que $f_n \xrightarrow{n} f$, amb $f(x) = 0$. Però $f'_n(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$, o sigui $f'_n(0) = \sqrt{n} \xrightarrow{n} +\infty$. En particular, no és $f'_n \xrightarrow{n} f'$.

(3) Considerem les funcions

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto n^2 x(1-x^2)^n \end{aligned}$$

Notem que són contínues i, per tant, integrables segons Riemann. Observem també que $f_n \xrightarrow{n} f$, amb $f(x) = 0$. No obstant, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 x(1-x^2)^n dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2(n+1)} = +\infty \neq \int_0^1 f(x)dx = 0$.

Un altre exemple: considerem les funcions

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lim_{m\to+\infty} \cos(n!\pi x)^{2m} \end{aligned}$$

Notem que és $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n!x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } n!x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$. Com que aquestes funcions són discontínues en un nombre finit de punts, són integrables segons Riemann. No obstant, la successió $(f_n)_n$ convergeix puntualment a la funció $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, que és un dels típics exemples de funcions no integrables segons Riemann.

Com a conseqüència de tot això, deduïm que les propietats de la convergència puntual potser no són les que més ens agradarien.

3.2 Convergència uniforme

Definició 3.2.1. Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$, $(f_n)_n$ una successió de funcions amb $f_n : E \longrightarrow Y$ i $f : E \longrightarrow Y$ una funció. Diem que $(f_n)_n$ *convergeix uniformement* a f i escrivim $f_n \overset{n}{\rightrightarrows} f$ o $f_n \rightrightarrows f$ si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ i } \forall x \in E \text{ és } d_y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

A més a més, diem que $(f_n)_n$ convergeix uniformement a f en $F \subseteq E$ si $(f_{n|F})_n$ convergeix uniformement a $f_{|F}$.

Observacions 3.2.2.

- Notem que la diferència fonamental entre aquesta definició i la de convergència puntual és que el $n_0 \in \mathbb{N}$ ara no depèn del $x \in E$. Dit d'una altra manera, a la convergència puntual és $\forall x \in E\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, mentre que en aquesta última és $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall x \in E$, la qual cosa és més restrictiva. Així doncs, la convergència uniforme implicaria la puntual.

- Com a conseqüència de l'anterior punt, si $f_n \rightrightarrows f_1$ i $f_n \rightrightarrows f_2$, llavors $f_1 = f_2$, i.e. el límit és únic.

- Habitualment és $Y = \mathbb{R}$, per tant, $d_y(f_n(x), f(x))$ s'escriuria com $|f_n(x) - f(x)|$.

- Finalment, cal dir que aquesta definició és poc pràctica i, normalment, per resoldre problemes concrets s'utilitza el següent criteri.

Teorema 3.2.3 (Criteri de convergència uniforme)**.** *Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$, $(f_n)_n$ una successió de funcions amb $f_n : E \longrightarrow Y$, $f : E \longrightarrow Y$ una funció i $(M_n)_n$ la successió de $\mathbb{R}$ amb terme general $M_n := \sup\limits_{x\in E} d_y(f_n(x), f(x))$.*
Aleshores $(f_n)_n$ convergeix uniformement a f si, i només si, $(M_n)_n \xrightarrow{n} 0$.

Demostració. Observem que a la Definició 3.2.1 es pot substituir $d_y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ per $d_y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$. Tenim:

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ i } \forall x \in E \text{ és } d_y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ és } M_n = \sup_{x \in E} d_y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow (M_n)_n \xrightarrow{n} 0$$

□

Observacions 3.2.4.

- Si $Y = \mathbb{R}$, serà $M_n = \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$.
- És important observar que $(M_n)_n$ és una successió numèrica, no de funcions, per tant, no hi ha cap dependència amb x. Tot i que pugui semblar obvi, aquest és un error molt típic.
- Aquest criteri és especialment útil quan podem utilitzar els teoremes vists a *Càlcul Diferencial* per calcular màxims.

De forma semblant a la Proposició 2.4.4, a la pràctica és usual demostrar que una successió de funcions *no* convergeix uniformement utilitzant successions. Més precisament:

Proposició 3.2.5. *Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$, $(f_n)_n$ una successió de funcions amb $f_n : E \longrightarrow Y$ i $f : E \longrightarrow Y$ una funció. Si existeix $(x_n)_n \subseteq E$ tal que $d_y(f_n(x_n), f(x_n)) \overset{n}{\nrightarrow} 0$, aleshores $f_n \not\rightrightarrows f$.*

Demostració. Tenim que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0$ complint $d_y(f_n(x_n), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Posant $x := x_n \in E$, observem que es compleix el contrari de la Definició 3.2.1. □

Exemple 3.2.6. Estudiem la convergència uniforme de $(f_n)_n$ amb $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ a $(0, 1]$.
Per a $x \in (0, 1]$ és $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{nx+1} = 0$. Per tant, $f_n \xrightarrow{n} 0$ (on 0 representa la funció que envia tot a 0).
Si $(f_n)_n$ convergís uniformement a f, llavors convergiria puntualment a f, per tant, seria $f = 0$. Això mostra que només cal estudiar la convergència uniforme cap a la funció 0.
Definim $x_n := \frac{1}{n} \in (0, 1]$. Aleshores $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \frac{1}{n/n+1} - 0 \right| = 1/2 \overset{n}{\nrightarrow} 0$. Finalment, per la proposició anterior, és $f_n \not\rightrightarrows 0$.

La idea del següent concepte és molt semblant a la de successió de Cauchy en un cos commutatiu totalment ordenat (cf. Definició 1.4.14)

Definició 3.2.7. Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$, $(f_n)_n$ una successió de funcions amb $f_n : E \longrightarrow Y$. Diem que $(f_n)_n$ és *uniformement de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m \geq n_0 \text{ i } \forall x \in E \text{ és } d_y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

A més a més, diem que $(f_n)_n$ és uniformement de Cauchy en $F \subseteq E$ si $(f_{n|F})_n$ és uniformement de Cauchy.

Teorema 3.2.8 (Completesa per successions uniformement de Cauchy)**.** *Amb les notacions de la Definició 3.2.7, però afegint $(Y, d_y) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Tenim que $(f_n)_n$ és uniformement de Cauchy si, i només si, $(f_n)_n$ convergeix uniformement, i.e., $\exists f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$.*

Demostració. $\Leftarrow$: Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ i $\forall x \in E$ és $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$.
Per tant, $\forall n, m \geq n_0$ i $\forall x \in E$ és $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x))| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

$\Rightarrow$: Sigui $\varepsilon > 0$, llavors existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$ i $\forall x \in E$ és $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$. En particular, $\forall x \in E$ la successió $(f_n(x))_n \subseteq \mathbb{R}$ és de Cauchy. Per la completesa per successions de $\mathbb{R}$, podem definir $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ per $f(x) := \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.
Com que $\forall n, m \geq n_0$ i $\forall x \in E$ és $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$, tenim que fixant $n \geq n_0$, la successió $(|f_n(x) - f_m(x)|)_m$ està acotada superiorment per $\varepsilon/2$ si $m \geq n_0$. En definitiva, per a $n \geq n_0$ és

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \to +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

$\square$

Passem ara a estudiar la convergència uniforme de sèries de funcions.

Definició 3.2.9. Siguin (X, d_x) un espai mètric, $E \subseteq X$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ una sèrie de funcions de E en $\mathbb{R}$ i $s : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció. Diem que la sèrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *convergeix uniformement* a s si la successió de sumes parcials $(s_N)_N$ (amb $s_N := \sum\limits_{n=0}^{N} f_n$) convergeix uniformement a s.
A més a més, diem que la sèrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ convergeix uniformement a s en $F \subseteq E$ si la sèrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{n|F}$ convergeix uniformement a $s_{|F}$.

A la pràctica, però, no sempre ens interessarà saber a què convergeix uniformement, sinó només si ho fa. Per això, el següent resultat acostuma a ser molt útil.

Corol·lari 3.2.10 (Criteri M de Weierstrass)**.** *Mantenint les notacions de la Definició 3.2.9. Si la sèrie numèrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sup\limits_{x \in E} |f_n(x)|$ convergeix, aleshores la sèrie de funcions $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ convergeix uniformement.*

Demostració. Pel Teorema de completesa, és suficient veure que la successió de sumes parcials $(s_N)_N$ és uniformement de Cauchy.
Per la completesa de $\mathbb{R}$, tenim que la successió amb terme general $A_m := \sum\limits_{n=0}^{m} \sup\limits_{x \in E} |f_n(x)|$ és de Cauchy. Per tant:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > m \geq n_0 \text{ és } |A_n - A_m| < \varepsilon \qquad (*)$$

Sigui $\varepsilon > 0$, triem el $n_0 \in \mathbb{N}$ donat per $(*)$. Aleshores per a $n > m \geq n_0$ i $x \in E$ tenim:

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{i=m+1}^{n} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=m+1}^{n} |f_i(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \sup_{x \in E} |f_i(x)| = |A_n - A_m| \overset{(*)}{<} \varepsilon$$

$\square$

Notem que la sèrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sup\limits_{x \in E} |f_n(x)|$ és numèrica. Per tant, podem aplicar els diversos resultats estudiats a *Introducció al Càlcul Integral*: 1r i 2n criteris de comparació, criteri de l'arrel, del quocient, de la integral, etc.

Per acabar la secció, provarem un cas en què coneixent la convergència puntual, en podem deduir la uniforme.

Teorema 3.2.11. *Siguin (X, d) un espai mètric, $K \subseteq X$ un compacte, $(f_n)_n$ una successió de funcions amb $f_n : K \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$. Suposem que es compleix:*

(1) $f_n \in \mathcal{C}(K)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(2) $f_n \xrightarrow{n} f$

(3) $f \in \mathcal{C}(K)$

(4) $\forall x \in K,\ \forall n \in \mathbb{N}$ *és* $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$

Aleshores $f_n \rightrightarrows f$*.*

Demostració. Definim $g_n := f_n - f$. Si aconseguim provar que $g_n \rightrightarrows 0$, aleshores tindrem que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ i $\forall x \in K$ és $|g_n(x) - 0(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, o sigui just el que volíem veure. Demostrem, doncs, que $g_n \rightrightarrows 0$.
Notem que g_n i g satisfan les hipòtesis (1),(2),(3) i (4):

(1) $g_n \in \mathcal{C}(K)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, perquè la diferència de funcions contínues és contínua.

(2) $g_n = f_n - f \xrightarrow{n} 0$, perquè donat $x \in K$ és $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) - f(x) = 0$

(3) $0 \in \mathcal{C}(K)$

(4) $\forall x \in K,\ \forall n \in \mathbb{N}$ és $g_n(x) = f_n(x) - f(x) \geq f_{n+1}(x) - f(x) = g_{n+1}(x)$

Sigui $\varepsilon > 0$. Recordem que volem veure que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ i $\forall x \in K$ és $|g_n(x) - 0(x)| = |g(x)| < \varepsilon$.

Per a cada $n \in \mathbb{N}$ definim $K_n := \{x \in K : |g_n(x)| \geq \varepsilon\} = g_n^{-1}((-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty))$. Com que g_n és contínua a K i $(-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty)$ és tancat, tenim que K_n és tancat a l'espai mètric $(K, d_{|K\times K})$. Pel Lemes 2.3.6 i 2.3.9, tenim que K_n és compacte a $(K, d_{|K\times K})$[2].

Si fos $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$, llavors $g_n(x) \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$ i, per la Regla del Sandwich, $0 \geq \varepsilon > 0$, contradicció. Per tant, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n = \varnothing$.

Per la propietat de la intersecció finita (cf. Proposició 2.3.12), tenim que existeix $J \subseteq \mathbb{N}$ finit tal que $\bigcap\limits_{n\in J} K_n = \varnothing$.

Com que $\forall x \in K$ i $\forall n \in \mathbb{N}$ és $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$, tenim $K_{n+1} \subseteq K_n$. Per tant, dient $n_0 := \max J$, és $\varnothing = \bigcap\limits_{n\in J} K_n = K_{n_0}$. O sigui, $\forall n \geq n_0$ és $K_n = \varnothing$, i.e., $\forall x \in K$ $|g_n(x)| < \varepsilon$. $\square$

Observació 3.2.12. Les hipòtesis d'aquest teorema es poden afeblir lleugerament. Per exemple, a (1) és suficient que les funcions siguin contínues a partir d'un cert $n_1 \in \mathbb{N}$. De forma semblant, a (4) ja tenim prou si $(f_n)_n$ és monòtona (creixent o decreixent) a partir d'un cert $n_2 \in \mathbb{N}$.

Exercicis

3.1. Sigui $f_n : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f_n(x) := \min\{n, x^{-1}\}$.

(a) Demostreu que $(f_n)_n$ convergeix puntualment a la funció $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \frac{1}{x}$.

[2] Tot i que no ho necessitem, també ho és a (X, d)

(b) És la successió uniformement convergent a $[a, +\infty), a > 0$? I a $(0, +\infty)$?

3.2. Sigui $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n 2^n x^2}$$

(a) Estudieu la convergència puntual de $(f_n)_n$.

(b) Estudieu la convergència uniforme de $(f_n)_n$.

3.3. Sigui $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida per $f_n(x) = x^n$.

(a) Calculeu per a $x \in [0, 1]$, $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

(b) Convergeix uniformement la successió $(f_n)_n$ a f en $[0, 1]$? I en $[0, \delta)$ per a $0 < \delta < 1$?

(c) Si $g_n(x) = f_n(x)(1 - x)$, calculeu $g(x) = \lim_n g_n(x)$ per a cada $x \in [0, 1]$.

(d) Demostreu que $(g_n)_n$ convergeix uniformement a g en $[0, 1]$.

3.4. Per a $\alpha \in \mathbb{R}$, considerem la successió de funcions $(f_n^\alpha)_n$ definida per:

$$f_n^\alpha(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n, x \in [0, 1]$$

(a) Calculeu per a $x \in [0, 1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n^\alpha(x)$.

(b) Demostreu que $(f_n^\alpha)_n$ convergeix uniformement en $[0, 1]$ si, i només si, $\alpha < 1/2$.

(c) Sigui $0 < \rho < 1$. Per a quins valors d'α convergeix uniformement en $[\rho, 1]$ la successió $(f_n^\alpha)_n$?

3.5. Siguin $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ complint:

(i) Per a tot $x \in [0, 1]$, $\lim_n f_n(x) = 0$.

(ii) Per a cada $n \geq 1$, la funció f_n és monòtona creixent en $[0, 1]$.

(a) Demostreu que $(f_n)_n$ convergeix uniformement a 0 en $[0, 1]$.

(b) És certa l'afirmació anterior si $f_n : [0, 1) \to \mathbb{R}$ i es compleixen les mateixes hipòtesis canviant $[0, 1]$ per $[0, 1)$?

3.6. (a) Donada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, definim

$$g_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

Demostreu que $g_n \xrightarrow{n} f$.

(b) Si $f(x) = e^x$, demostreu que per a tot $a \in \mathbb{R}$, $g_n \rightrightarrows f$ en $(-\infty, a]$.

3.7. Per a $n \geq 1$ i $f, g \in \mathcal{C}([-n, n])$, definim:

$$d_n(f, g) = \sup_{x\in[-n,n]} |f(x) - g(x)|$$

(a) Demostreu que d_n és una distància en $\mathcal{C}([-n, n])$, però no ho és en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

(b) Per a $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, definim:

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}$$

(i) Demostreu que d és una distància en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

(ii) Sigui $(f_j)_j$ una successió de funcions de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Demostreu que $f_j \xrightarrow{j} f$ en $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), d)$ si, i només si, $f_j \rightrightarrows f$ en tot compacte $K \subseteq \mathbb{R}$.

3.8. Per a $n \in \mathbb{N}$, sigui $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2}$$

(a) Calculeu el límit puntual de la successió $(f_n)_n$.

(b) Estudieu la convergència uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $\mathbb{R}$.

(c) Estudieu la convergència uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$, $a > 0$.

(d) Estudieu la convergència puntual de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^3$ en $\mathbb{R}$.

(e) Estudieu la convergència uniforme de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^3$ en $\mathbb{R}$.

(f) Estudieu la convergència uniforme de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^3$ en $[a, b]$, on $0 < a < b < \infty$.

3.9. Estudieu la convergència uniforme de la sèrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{ne^{-nx}}{1 + nx}$ en $[1, +\infty)$.

3.3 Límits i continuïtat

En aquesta secció veurem les conseqüències de la convergència uniforme sobre els conceptes de límit i de continuïtat.

Teorema 3.3.1 (Commutativitat de límits)**.** *Siguin (X, d) un espai mètric, $E \subseteq X$, $x \in E'$ i $f_n : E \to \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ complint $f_n \rightrightarrows f$. Suposem que per a cada $n \in \mathbb{N}$ existeix $\lim\limits_{t \to x} f_n(x) =: a_n \in \mathbb{R}$. Llavors $(a_n)_n$ convergeix i $\lim\limits_{t \to x} f(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, i.e. $\lim\limits_{t \to x} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{t \to x} f_n(t) \right)$.*

Demostració. Comencem veient que $(a_n)_n$ convergeix.
Sigui $\varepsilon > 0$. Com que $f_n \rightrightarrows f$, tenim que $(f_n)_n$ és uniformement de Cauchy. Per tant, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$ i $\forall t \in E$ és $|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon/2$. Passant al límit, tenim:

$$\lim_{t \to x} |f_n(t) - f_m(t)| = \left| \lim_{t \to x} (f_n(t) - f_m(t)) \right| = |a_n - a_m| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Això mostra que $(a_n)_n$ és de Cauchy, però com que $\mathbb{R}$ és complet per successions, ja tenim el que volíem. Posem $a := \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Veiem ara que $\lim\limits_{t \to x} f(t) = a$. Notem que:

(1) $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq \mathbb{N}$ i $\forall t \in E$ és $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ és $\lim\limits_{t \to x} f_n(t) = a_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $\forall t \in E$ complint $d(t, x) < \delta$ és $|f_n(t) - a_n| < \varepsilon/3$

(3) $(a_n)_n \xrightarrow{n} a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_2$ és $|a_n - a| < \varepsilon/3$

Sigui $\varepsilon > 0$. Escollim $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ (n_1 i n_2 donats per (1) i (3)). Posem $n := n_0$ a (2) i obtenim un $\delta > 0$. Llavors per a tot $t \in E$ complint $d(t, x) < \delta$ és

$$|f(t) - a| \leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

□

Observació 3.3.2. Notem que la hipòtesi $Y = \mathbb{R}$ en aquest resultat és fonamental, ja que hem utilitzat la completesa per successions de $\mathbb{R}$. No obstant, per al següent teorema no serà necessari (però s'haurà d'imposar que $x \in E$).

Teorema 3.3.3 (Convergència uniforme i continuïtat)**.** *Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$, $(f_n)_n$ una successió de funcions amb $f_n : E \longrightarrow Y$, $f : E \longrightarrow Y$ una funció. Si $f_n \rightrightarrows f$ i les funcions f_n són contínues a $p \in E$, llavors f també és contínua a p.*

Demostració. Tenim:

(1) $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ i $\forall x \in E$ és $d_y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ és f_n contínua en $p \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ i $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in E$ complint $d_x(x, p) < \delta$ és $d_y(f_n(x), f_n(p)) < \varepsilon/3$

Sigui $\varepsilon > 0$. Triem el $n_0 \in \mathbb{N}$ donat per (1) i el $\delta > 0$ donat per (2) amb $n := n_0$. Aleshores $\forall x \in E$ complint $d_x(x, p) < \delta$, tenim:

$$d_y(f(x), f(p)) \leq d_y(f(x), f_{n_0}(x)) + d_y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(p)) + d_y(f_{n_0}(p), f(p)) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

□

Observació 3.3.4. Pel cas $Y = \mathbb{R}$ la demostració és totalment vàlida però es pot escurçar utilitzant la commutativitat de límits. En efecte, si $p \in E$ és un punt aïllat, llavors f és trivialment contínua a p. D'altra banda, si p és un punt d'acumulació de E, llavors és un punt límit de E i tenim:

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to p} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} f_n(p) = f(p)$$

Com a conseqüència pràcticament immediata d'això, tenim el següent corol·lari.

Corol·lari 3.3.5. *Siguin (X, d) un espai mètric, $E \subseteq X$, $(f_n)_n$ una successió de funcions amb $f_n : E \to \mathbb{R}$ i $s : E \to \mathbb{R}$ una funció. Si la sèrie de funcions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ convergeix uniformement a s i les f_n són contínues a $p \in E$, aleshores s és contínua a p.*

Demostració. Només cal tenir en compte que la suma de funcions contínues és contínua i aplicar el Teorema 3.3.3 o bé l'Observació 3.3.4.

□

Exercicis

3.10. Siguin (E, d), (F, d') espais mètrics i $(f_n)_n$ una successió de funcions (amb $f_n : E \to F$) uniformement convergent en E cap a una funció $f : E \to F$.

(a) Demostreu que si per a tot $n \in \mathbb{N}$, $(f_n)_n$ és uniformement contínua en E, llavors f és uniformement contínua en E.

(b) Demostreu que si $g : F \to \mathbb{R}$ és uniformement contínua en F, llavors $(g \circ f_n)_n$ convergeix uniformement en E cap a una funció $h : E \to \mathbb{R}$.

3.11. Sigui $\alpha > 0$ i $(f_n)_n$ la successió de funcions definides per

$$f_n(x) = \left(\frac{1+nx}{n+x^2}\right)^{\alpha}$$

(a)

(b) Estudieu la convergència puntual de $(f_n)_n$ en $[0, +\infty)$..

(c) Estudieu la convergència uniforme de $(f_n)_n$ en $[0, 1]$.

3.12. Siguin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tals que $a < b$, $c < d$, $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b] \times [c, d]$ i $(x_n)_n \subseteq [a, b]$ una successió convergent.

(a) Per a cada enter $n \geq 1$ considerem la funció $f_n : [c, d] \to \mathbb{R}$ definida per $f_n(t) = f(x_n, t)$. Demostreu que la successió $(f_n)_n$ convergeix uniformement en $[c, d]$.

(b) Per a cada enter $n \geq 1$ considerem la funció $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida per

$$g_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{t}\log(1 + t/n), & t > 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Demostreu que la successió $(g_n)_n$ convergeix uniformement en $[0, 1]$, però no ho fa en $[0, \infty)$.

3.13. Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$, $f, f_n : E \longrightarrow Y$ tals que $f_n \rightrightarrows f$. Sigui també $x \in E$ i suposem que f és contínua a x. Aleshores $\forall (x_n)_n \subseteq E$ tal que $(x_n)_n \xrightarrow{n} x$, és $(f_n(x_n))_n \xrightarrow{n} f(x)$.

3.14. Calculeu

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - 1}$$

3.4 Derivació

Ens dedicarem únicament a provar el següent resultat.

Teorema 3.4.1 (Convergència uniforme i derivació)**.** *Siguin $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, amb $n \in \mathbb{N}$, funcions derivables a $[a, b]$ que compleixen:*

(1) $(f_n')_n$ *convergeix uniformement.*

(2) $\exists x_0 \in (a, b)$ *tal que* $(f_n(x_0))_n$ *és convergent.*

Aleshores existeix una funció $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable a $[a, b]$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ i $f_n' \rightrightarrows f'$.

Demostració. Tenim:

(1) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_1$ i $\forall x \in [a, b]$ és $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right\}$

(2) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_2$ és $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon/2$.

Sigui $\varepsilon > 0$, diem $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Llavors per a $n, m \geq n_0$ es compleixen (1) i (2) i donat $x \in [a, b], x \neq x_0$, podem aplicar el Teorema del Valor Mig a la funció $(f_n - f_m)$:

$$\exists z \in (x_0, x) \text{ (o bé } (x, x_0)) \text{ tal que } |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| =$$
$$= |(f_n' - f_m')(z)||x - x_0| = |f_n'(z) - f_m'(z)||x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon/2$$

Per tant, per a tot $x \in [a, b]$ és

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| + |(f_n - f_m)(x_0)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

D'altra banda, si $x = x_0$ això últim és immediatament cert per (2). Tot això mostra que $(f_n)_n$ és uniformement de Cauchy. Per la completesa, tenim que $\exists f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$. Ara es tracta de veure que f és derivable a $[a, b]$ i que $f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$.

Fixem $x \in [a, b]$. Definim funcions $\Phi_n, \Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ per:

$$\Phi_n(t) := \begin{cases} \frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}, & \text{si } t \neq x \\ f_n'(x), & \text{si } t = x \end{cases} \qquad \Phi(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, & \text{si } t \neq x \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x), & \text{si } t = x \end{cases}$$

Observem que $\Phi_n \xrightarrow{n} \Phi$. Veiem que $(\Phi_n)_n$ és uniformement de Cauchy.
Siguin $\varepsilon > 0$, $n, m \geq n_1$ i $t \in [a, b]$, aleshores:

- Si $t = x$, llavors utilitzant (1), tenim:

$$|\Phi_n(t) - \Phi_m(t)| = |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$$

- Si $t \neq x$, llavors utilitzant (1) i el Teorema del Valor Mig, tenim:

$$|\Phi_n(t) - \Phi_m(t)| = \left| \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} - \frac{f_m(t) - f_m(x)}{t - x} \right| =$$
$$= \frac{|(f_n - f_m)(t) - (f_n - f_m)(x)|}{|t - x|} = |f_n'(z) - f_m'(z)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Per la completesa, tenim $\Phi_n \xrightarrow{n} \Phi$. Notem que les funcions Φ_n són contínues a $[a, b]$, perquè les f_n són derivables. Pel Teorema 3.3.3, tenim que Φ és contínua a $[a, b]$. Per tant:

$$\lim_{t\to x} \Phi(t) = \Phi(x) \Rightarrow \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) \in \mathbb{R}$$

Això últim demostra que f és derivable a $[a, b]$ i $f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$, com volíem veure. $\square$

Observació 3.4.2. És important notar que aquest resultat no diu que si $(f_n)_n$ és una successió de funcions derivables tal que $f_n \rightrightarrows f$, aleshores f és derivable i $f_n' \rightrightarrows f'$. Tot i que sembli evident, aquesta és una confusió força habitual.

3.5 Integració

Abans de començar a provar resultats sobre la integrabilitat segons Riemann, anem a recordar alguns conceptes de l'assignatura d'*Introducció al Càlcul Integral*.

Definició 3.5.1. Direm que $P = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ és una *partició* d'un interval $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Denotarem per $\mathcal{P}([a, b])$ al conjunt de totes les particions de $[a, b]$.

Definició 3.5.2. Siguin $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un funció acotada, $P = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ una partició de $[a, b]$, $m_k := \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ i $M_k := \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.
Definim la *suma inferior de f associada a P*: $s_P(f) := \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$
Definim la *suma superior de f associada a P*: $S_P(f) := \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$

Definició 3.5.3. Amb les notacions de la definició anterior, definim:

$$\Omega_s(f) := \{s_P(f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

$$\Omega_S(f) := \{S_P(f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

Definició 3.5.4. Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció acotada. Definim la *integral inferior de Riemann* de f en $[a, b]$:

$$\underline{\int_a^b} f := \sup \Omega_s(f)$$

Definim la *integral superior de Riemann* de f en $[a, b]$:

$$\overline{\int_a^b} f := \inf \Omega_S(f)$$

Definició 3.5.5. Direm que una funció $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada és *integrable Riemann* si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En aquest cas escriurem els valor anteriors com $\int_a^b f$, que anomenarem *integral de Riemann de f en $[a, b]$*.
Denotarem per $\mathcal{R}([a, b])$ al conjunt de totes les funcions integrables Riemann en $[a, b]$.

Lema 3.5.6. *Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$, $(f_n)_n$ una successió de funcions acotades amb $f_n : E \to Y$ i $f : E \to Y$. Si $f_n \rightrightarrows f$, aleshores f és acotada.*

Demostració. Tenim:

- f_n acotada $\Rightarrow \exists M_n \in \mathbb{R}, p_n \in Y$ tals que $\forall x \in E$ és $f_n(x) \in B(p_n, M_n)$.
- $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ i $\forall x \in E$ és $d_y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Triant $\varepsilon = 1$, tenim que $\forall x \in E$ és

$$d_y(f(x), p_{n_0}) \leq d_y(f(x), f_{n_0}(x)) + d_y(f_{n_0}(x), p_{n_0}) < 1 + M_{n_0}$$

O sigui, $f(E) \subseteq B(p_{n_0}, 1 + M_{n_0})$. □

Teorema 3.5.7 (Convergència uniforme i integració)**.** *Siguin $(f_n)_n$ una successió de funcions, amb $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si les funcions f_n són integrables Riemann en $[a, b]$ i $f_n \rightrightarrows f$, aleshores f és integrable Riemann en $[a, b]$ i*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

És a dir, el límit es pot posar dins la integral.

Demostració. Veiem primer la integrabilitat de f en $[a,b]$ (i.e. $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$).

Com que $f_n \rightrightarrows f$, tenim que $\varepsilon_n := \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n} 0$. Per tant:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b] \text{ és } |f_n(x) - f(x)|\varepsilon_n \Rightarrow -\varepsilon_n \leq f_n(x) - f(x) \leq \varepsilon_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n \qquad (*)$$

Per a cada $n \in \mathbb{N}$ és $(f_n - \varepsilon_n), f_n + \varepsilon_n) \in \mathcal{R}([a,b])$, ja que $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$ és una constant. A més a més, pel lema anterior, f és acotada, per tant, té sentit considerar $\underline{\int_a^b} f$ i $\overline{\int_a^b} f$. Llavors tenim:

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n) = \underline{\int_a^b} (f_n - \varepsilon_n) \overset{(*)}{\leq} \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \overset{(*)}{\leq} \overline{\int_a^b} (f_n + \varepsilon_n) = \int_a^b (f_n + \varepsilon_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n) - \int_a^b (f_n - \varepsilon_n) = \int_a^b 2\varepsilon_n = 2\varepsilon_n(b-a) \xrightarrow{n} 0$$

Per la Regla del Sandwich, tenim $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, com volíem veure.

Centrem-nos ara en la segona part del teorema. Afegint integrals a l'expressió $(*)$, tenim:

$$-\varepsilon_n(b-a) + \int_a^b f_n \leq \int_a^b f \leq \varepsilon_n(b-a) + \int_a^b f_n \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\varepsilon_n(b-a) + \int_a^b f_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n \leq \int_a^b f \leq \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\varepsilon_n(b-a) + \int_a^b f_n\right)$$

Aplicant de nou la Regla del Sandwich, obtenim el resultat desitjat. □

Corol·lari 3.5.8. *Siguin $(f_n)_n$ una successió de funcions, amb $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si les funcions f_n són integrables Riemann en $[a,b]$ i la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ convergeix uniformement, aleshores la funció suma puntual $s = \sum_{n=0}^{\infty} f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ és integrable Riemann en $[a,b]$ i*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \int_a^b s$$

Demostració. Conseqüència del fet que la suma de funcions integrables Riemann és integrable Riemann i del Teorema 3.5.7. □

Exercicis

3.15. Sigui $f_n : [-1,1] :\to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ la successió de funcions definida per $f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}}$.

(a) Estudieu la convergència puntual i uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $[-1,1]$.

(b) Calculeu

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^1 e^{\frac{x^2}{n}}\, dx$$

3.16. Sigui $g_n : [1,3] :\to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ la successió de funcions definida per $f_n(x) = \dfrac{nx^2+3}{x^3+nx}$.

(a) Estudieu la convergència puntual i uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $[1, 3]$.

(b) Calculeu

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^3 \frac{nx^2+3}{x^3+nx} dx$$

3.17. Sigui $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funció contínua i sigui $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida per $g_n(x) = f(x^n)$. Demostreu que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = f(0)$$

Nota: No cal aplicar cap resultat d'aquesta secció.

3.18. Demostreu que per a cada $h > 0$, la sèrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ convergeix uniformement en $[h, +\infty)$. Si $f(x)$ denota la suma, calculeu, per a cada $h < a < b$, el valor de $\int_a^b f(x)dx$.

3.6 Criteri de Dirichlet. Aproximació de Weierstrass

En aquesta secció exposarem i demostrarem un criteri força útil a la pràctica, especialment quan tractem amb sèries el signe del terme general de les quals no és constant.

Teorema 3.6.1 (Criteri de convergència uniforme de Dirichlet). *Siguin (X, d_x) un espai mètric, $E \subseteq X$, $(f_n)_n, (g_n)_n$ un parell de successions de funcions amb $f_n, g_n : E \to \mathbb{R}$ tals que:*

(a) *$\forall x \in E$ i $\forall n \in \mathbb{N}$ és $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$.*

(b) *$g_n \rightrightarrows 0$.*

(c) *Si $F_N := \sum\limits_{n=0}^{N} f_n$, es compleix que $\exists M > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ i $\forall x \in E$ és $|F_N(x)| \leq M$.*

Aleshores la sèrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (f_n \cdot g_n)$ convergeix uniformement en E.

Demostració. Serà suficient veure que la successió de sumes parcials $(s_N)_N$ és uniformement de Cauchy.

Notem primer que $\forall n < m$ i $\forall x \in E$ és $g_n(x) \overset{(a)}{\geq} g_m(x) \xrightarrow{m} 0$ En particular,

$$\forall x \in E \; \forall n \in \mathbb{N} \text{ és } g_n(x) \geq 0 \tag{1}$$

D'altra banda, per a cada $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ és

$$f_k = F_k - F_{k-1} \tag{2}$$

A més a més,

$$\sum_{k=n+1}^{m} F_k(x)g_k(x) = F_m(x)g_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} F_k(x)g_k(x) \tag{3}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1} F_k(x)g_{k+1}(x) = F_n(x)g_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} F_k(x)g_{k+1}(x) \tag{4}$$

Siguin $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ i $x \in E$, tenim:

$$\begin{aligned}
0 \le |s_m(x) - s_n(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)g_k(x)\right| \overset{(2)}{=} \left|\sum_{k=n+1}^{m} F_k(x)g_k(x) - \sum_{k=n+1}^{m} F_{k-1}(x)g_k(x)\right| = \\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{m} F_k(x)g_k(x) - \sum_{k=n}^{m-1} F_k(x)g_{k+1}(x)\right| \overset{(3),(4)}{=} \\
&= \left|F_m(x)g_m(x) - F_n(x)g_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x))\right| \\
&\le \sum_{k=n+1}^{m-1} |F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x))| + |F_m(x)g_m(x)| + |F_n(x)g_{n+1}(x)| \overset{(c)}{\le} \\
&\le M\left[\sum_{k=n+1}^{m-1} |g_k(x) - g_{k+1}(x) + |g_m(x)| + |g_{n+1}(x)|\right] \overset{(1),(a)}{\le} \\
&\le M\left[\sum_{k=n+1}^{m-1} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_m(x) + g_{n+1}(x)\right] = 2Mg_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Sigui $\varepsilon > 0$. Com que $g_n \rightrightarrows 0$, tenim que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \ge n_0$ i $\forall x \in E$ és $|g_n(x)| \overset{(1)}{=} g_n(x) < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Per tant, $\forall n, m \ge n_0$ i $\forall x \in E$ és

$$|s_m(x) - s_n(x)| \le 2Mg_{n+1}(x) < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

□

Un cas particular d'aquest resultat és el criteri de Leibniz, que ja es va veure a *Introducció al Càlcul Integral*.

Corol·lari 3.6.2 (Criteri de Leibniz). *Si la successió numèrica $(a_n)_n$ és monòtona decreixent i $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, aleshores la sèrie alternada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ és convergent.*

Demostració. Podem pensar les successions numèriques $(a_n)_n$ i $((-1)^n)_n$ com a successions de funcions definides en un sol punt de qualsevol espai mètric o com a funcions constants a tot un espai mètric. En qualsevol cas, com que $(a_n)_n \xrightarrow{n} 0$, trivialment tenim $a_n \rightrightarrows 0$. Posem $f_n := (-1)^n$ i $g_n := a_n$. Aleshores es compleixen les hipòtesis del criteri de Dirichlet:

(a) Perquè $(a_n)_n$ és decreixent.

(b) Pel que ja s'ha comentat.

(c) Si $F_N := \sum_{n=0}^{N}(-1)^n$, aleshores per a $M = 1 > 0$ és $|F_N| = \left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\right| \le 1 = M$.

Per tant, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ convergeix uniformement en el domini escollit i, en particular, convergeix com a sèrie numèrica. □

Per acabar la secció (i el capítol), enunciarem i demostrarem el Teorema d'aproximació de Weierstrass. Una demostració alternativa es pot trobar a [Rud, pàg. 170]. També es pot consultar una generalització feta per Marshall H. Stone (de vegades es coneix el resultat per Teorema de Stone-Weierstrass) a [Roy, pàg. 210] i a [Rud, pàg. 174].

Teorema 3.6.3 (Aproximació de Weierstrass)**.** *Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua a $[a,b]$, aleshores existeix una successió de polinomis $(p_n)_n \subseteq \mathbb{R}[x]$ tal que $p_n \rightrightarrows f$.*

La prova que oferirem en aquests apunts es pot trobar a [Ross, pàg. 216] i va ser descoberta per S.N. Bernstein en un context de teoria de probabilitats que el va fer arribar als polinomis de la forma

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad n \in \mathbb{N}, k \in \{0,1,\dots,n\}$$

els quals són l'essència d'aquesta demostració.

Comencem la prova amb el següent lema:

Lema 3.6.4. *Per a tots $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, tenim:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 \tag{a}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \tag{b}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(nx - x + 1) \tag{c}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \leq \frac{n}{4} \tag{d}$$

Demostració. (a) Utilitzant el binomi de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{1}$$

amb $a = x$ i $b = 1 - x$ és immediat.

(b) Derivem cada banda de (1) respecte a i multipliquem per a:

$$an(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{2}$$

Posant $a = x$ i $b = 1 - x$ tenim el que volem.

(c) Derivem cada banda de (2) respecte a, multipliquem per a i simplifiquem:

$$an(a+b)^{n-2}(an+b) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{3}$$

Posant $a = x$ i $b = 1 - x$ tenim el que volem.

(d) Per veure la igualtat podem desenvolupar $(nx-k)^2$, separar la suma i utilitzar les equacions (a), (b) i (c).
Per la desigualtat és suficient observar que $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0$

$\square$

Definició 3.6.5. Sigui $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una aplicació. Definim els *polinomis de Bernstein* per la funció f com

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

per a cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.6.6. *Sigui $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funció contínua a $[0,1]$, aleshores $B_n f \rightrightarrows f$ en $[0,1]$*

Demostració. El cas $f = 0$ és trivial. Suposem que $f \neq 0$. Definim

$$M := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| > 0$$

Sigui $\varepsilon > 0$, pel Teorema 2.4.5, tenim que f és uniformement contínua a $[0,1]$, i.e. $\exists \delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in [0,1], \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

El nostre objectiu és veure que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0 \text{ i } \forall x \in [0,1] \text{ és } |B_n f(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

Triarem $n_0 = \left\lceil \frac{M}{\varepsilon \delta^2} \right\rceil$. Fixem $x \in [0,1]$ i $n \geq n_0$. Per (a), és

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Per tant, utilitzant la desigualtat triangular:

$$\begin{aligned} |B_n f(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned} \tag{3}$$

Dividirem aquesta suma en dues que acotarem per $\varepsilon/2$. Definim:

$$A := \left\{ k \in \{0,1,\dots,n\} : \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \right\} \qquad \text{i} \qquad B := \left\{ k \in \{0,1,\dots,n\} : \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \right\}$$

Si $k \in A$, tenim, per (1), $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \varepsilon/2$. Per tant:

$$\sum_{k \in A} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in A} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \overset{(a)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}$$

Si $k \in B$, tenim $\left|\frac{k-nx}{n}\right| \geq \delta$, o sigui, $(k-nx)^2 \geq n^2\delta^2$. A més a més, $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| \leq |f(\frac{k}{n})| + |f(x)| \leq 2M$. Per tant:

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in B} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq 2M \sum_{k \in B} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k \in B} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \overset{(d)}{\leq} \frac{2M}{n^2\delta^2} \frac{n}{4} = \frac{M}{2n\delta^2} \leq \frac{M}{2n_0\delta^2} \leq \frac{M}{2\delta^2 \frac{M}{\varepsilon\delta^2}} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Això prova que la suma de (3) està acotada per ε. En definitiva, es compleix (2) i això acaba la demostració. $\square$

Demostració. (del Teorema d'aproximació de Weierstrass (3.6.3)) Notem que les aplicacions

$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] &\to [a,b] \\ x &\mapsto (b-a)x+a \\ \phi : [a,b] &\to [0,1] \\ y &\mapsto \frac{y-a}{b-a} \end{aligned}$$

són contínues i inverses entre sí. En particular, són bijectives.

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, aleshores $(f \circ \varphi) : [0,1] \to \mathbb{R}$ i, pel Teorema 3.6.6, existeix una successió de polinomis $(p_n)_n$ que convergeix uniformement a $(f \circ \varphi)$ en $[0,1]$. Això vol dir que $\forall \varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ i $\forall x \in [0,1]$ és $|p_n(x) - (f \circ \varphi)(x)| < \varepsilon$.

Afirmem que la successió de polinomis $(q_n)_n = (p_n \circ \phi)_n$ convergeix uniformement a f en $[a,b]$. En efecte, si $\varepsilon > 0$, podem triar el $n_0 \in \mathbb{N}$ anterior i tenim que $\forall n \geq n_0$ i $\forall y \in [a,b]$ és

$$|q_n(y) - f(y)| = |(p_n \circ \phi)(y) - f(y)| = |p_n(\phi(y)) - (f \circ \varphi)(\phi(y))| < \varepsilon,$$

ja que $\phi(y) \in [0,1]$. $\square$

Capítol 4

Sèries de potències

En aquest capítol aplicarem els resultats de l'anterior a un tipus concret de sèries: les sèries de potències. Aquestes són les de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, on $(a_n)_n$ és una successió de $\mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$.[1]
Notem que fent el canvi $y = x - a$, tindrem una sèrie de potències de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Per tant, serà suficient estudiar aquestes sempre i quan tinguem en compte que, al final, haurem de desfer el canvi.

4.1 Conceptes bàsics i resultats preliminars

Aquesta secció la dedicarem a recordar i ampliar alguns resultats sobre sèries numèriques ja vists a l'assignatura d'*Introducció al Càlcul Integral.*
Definició 4.1.1. Una *sèrie numèrica* és un parell de successions $(a_n)_n, (A_N)_N \subseteq \mathbb{R}$ relacionades per la fórmula $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$.
Per simplicitat, escriurem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ per referir-nos a la sèrie.
Anomenarem *successió dels termes generals* a $(a_n)_n$ i *successió de les sumes parcials* a $(A_N)_N$. Direm que la sèrie és convergent si la successió de sumes parcials ho és i, en aquests cas, anomenarem *suma de la sèrie* al seu límit.

Proposició 4.1.2. *Si la sèrie numèrica* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *convergeix, aleshores* $(a_n)_n \xrightarrow{n} 0$

Demostració. Posem $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Llavors $a_n = (A_{n+1} - A_n) \xrightarrow{n} (A - A) = 0$. On hem utilitzat el Corol·lari 1.4.11(c). □

Lema 4.1.3. *Sigui* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una sèrie numèrica amb* $a_n \geq 0$*. Aleshores la sèrie és convergent si, i només si, la successió de sumes parcials està acotada.*

Demostració. La implicació d'esquerra a dreta és el Lema 1.4.8.
Per la de dreta a esquerra, notem que la successió de sumes parcials és monòtona creixent, per tant, només cal aplicar la Proposició 1.5.11 □

Teorema 4.1.4 (Primer criteri de comparació)**.** *Siguin* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *dues sèries numèriques amb* $a_n, b_n \geq 0$*. Suposem que existeixen* $k > 0$ *i* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tals que* $a_n \leq k b_n$ $\forall n \geq n_0$*. Aleshores:*

[1]Aquesta definició servirà pels nostres propòsits en aquesta assignatura, però la forma habitual de definir *sèrie de potències* és generalitzant la idea de polinomi.

(a) *Si la sèrie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *és convergent, llavors també ho és* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *és divergent (i.e. no convergent), aleshores* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *també és divergent.*

Demostració. Observem que és suficient provar (a), ja que (b) és el seu contrarecíproc.
Pel lema anterior, la successió $(B_N)_N$ està acotada, i.e. existeix $C > 0$ tal que $\forall N \in \mathbb{N}$ és $|B_N| = B_N \leq C$.
Observem que per a $N \geq n_0$ és $|A_N| = A_N = a_0 + \ldots + a_N = A_{n_0-1} + (a_{n_0} + \ldots + a_N) \leq A_{n_0-1} + k(b_{n_0} + \ldots + b_N) \leq A_{n_0-1} + kB_N \leq A_{n_0-1} + kC$.
Això implica que la successió $(A_N)_N$ està acotada per $A_{n_0-1} + kC$. Tornant a aplicar el lema, tenim el que volíem. $\square$

Teorema 4.1.5 (Segon criteri de comparació)**.** *Siguin* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *dues sèries numèriques amb* $a_n, b_n \geq 0$. *Suposem que existeix* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty]$. *Es compleix:*

(a) *Si* $l \in (0, +\infty)$, *llavors* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *convergeix si, i només si,* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *convergeix.*

(b) *Si* $l = 0$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *convergeix, llavors* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *també convergeix.*

(c) *Si* $l = +\infty$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *convergeix, llavors* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *també convergeix.*

Demostració. (a) Triant $0 < \varepsilon < l$ (per exemple, $\varepsilon = l/2$), tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| \leq \varepsilon$, o sigui, $0 < (l - \varepsilon)b_n < a_n < (l + \varepsilon)b_n$. Només cal aplicar el primer criteri de comparació.

(b) Per a $\varepsilon = 1$, tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < 1$, o sigui, $a_n < b_n$. De nou, només cal aplicar el primer criteri.

(c) Per a $M = 1$, tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $\frac{a_n}{b_n} > M = 1$, o sigui, $b_n < a_n$. Pel primer criteri, ja hem acabat.

$\square$

Definició 4.1.6. Direm que una sèrie numèrica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és *absolutament convergent* si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergeix.

Notem que els anteriors criteris només són aplicables a sèries amb termes generals no negatius. El següent resultat pot ajudar en situacions en què no es compleix això.

Proposició 4.1.7. *Si una sèrie numèrica és absolutament convergent, llavors és convergent.*

Demostració. Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie absolutament convergent. Observem que $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$. Sumant $|a_n|$, tenim $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$. Utilitzant el primer criteri de comparació, tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + |a_n|$ convergeix. Ara bé:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (a_n + |a_n|) - |a_n| =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(a_n+|a_n|) - \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}|a_n| = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+|a_n|) - \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$$

On hem utilitzat el Corol·lari 1.4.11(c).
En definitiva, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeix. □

Definició 4.1.8. Sigui $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$. Definim els límits superior i inferior per:

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

respectivament.

Observació 4.1.9. Si la successió $(a_n)_n$ està acotada, llavors per la Proposició 1.5.11 existeixen tant el límit superior com l'inferior i són finits.
Si la successió $(a_n)_n$ convergeix a l, llavors els límits superior i inferior també valen l.
Si els límits superior i inferior valen tots dos $l \in \mathbb{R}$, llavors $(a_n)_n$ convergeix cap a l.

Lema 4.1.10 (Suma de sèries geomètriques)**.** *La sèrie numèrica* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} r^n$ *convergeix si, i només si,* $r \in (-1,1)$*. En aquest cas, la seva suma és* $\dfrac{r^{n_0}}{1-r}$

Demostració. Els casos $r = \pm 1$ són clars. Veiem què passa si $|r| \neq 1$.
Sigui $(R_N)_N$ la successió de sumes parcials. Llavors per a $N \geq n_0$ és:

$$R_N(1-r) = R_N - rR_N = r^{n_0} - r^{N+1} \Rightarrow R_N = \frac{r^{n_0}-r^{N+1}}{1-r}$$

D'aquesta darrera igualtat se'n dedueix el resultat. □

Teorema 4.1.11 (Criteri de l'arrel)**.** *Sigui* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *una sèrie numèrica i suposem que existeix* $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: l \in \mathbb{R}$*. Aleshores:*

(a) *Si* $l < 1$*, la sèrie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *és absolutament convergent.*

(b) *Si* $l > 1$*, la sèrie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *és divergent.*

Demostració. (a) Triant $0 < \varepsilon < 1-l$ (per exemple, $\varepsilon = (1-l)/2$), tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\sup\limits_{k\geq n_0} \sqrt[k]{|a_k|} - l\right| < \varepsilon$. En particular, $\forall n \geq n_0$ és $0 < \sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon + l < 1$ i elevant: $0 < |a_n| < (\varepsilon+l)^n < 1$. Pel lema anterior, tenim que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\varepsilon+l)^n$ convergeix. Finalment, pel primer criteri ja hem acabat.

(b) Triant $0 < \varepsilon < l-1$ (per exemple, $\varepsilon = (l-1)/2$), tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $\left|\sup\limits_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|} - l\right| < \varepsilon$. En particular, $1 < -\varepsilon + l < \sup\limits_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|}$ $(*)$.
Notem que per a $\varepsilon' = 1$, tenim que donat $n_1 \in \mathbb{N}$, per $(*)$, existeix $n \geq n_1$ tal que $|a_n| \geq \sqrt[n]{|a_n|} > 1 = \varepsilon'$. Això demostra que $(|a_n|)_n \not\to 0$ i, per tant, $(a_n)_n \not\to 0$. La Proposició 4.1.2 acaba la prova.

□

Lema 4.1.12. *Sigui* $(a_n)_n \subseteq (0,+\infty)$. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: l \in \mathbb{R}$, *aleshores* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Demostració. Sigui $0 < \varepsilon < l$. Aleshores existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és

$$0 < l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

Per tant, per a $n \geq n_0$, tenim:

$$0 < (l-\varepsilon)^{n-n_0} < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_{n_0}} < (l+\varepsilon)^{n-n_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n_0}(l-\varepsilon)^{n-n_0} < a_n < a_{n_0}(l+\varepsilon)^{n-n_0} \Rightarrow \sqrt[n]{a_{n_0}}(l-\varepsilon)^{1-\frac{n_0}{n}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_{n_0}}(l+\varepsilon)^{1-\frac{n_0}{n}}$$

Això implica que $(\sqrt[n]{a_n})_n$ està acotada. Per tant, té sentit prendre els límits inferiors i superiors en les desigualtats anteriors:

$$l - \varepsilon \leq \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq l + \varepsilon$$

Com que això és cert per a tot $0 < \varepsilon < l$, tenim que els límits inferior i superior coincideixen i valen l. Per tant, la successió $(\sqrt[n]{a_n})_n$ convergeix cap a l.[2] $\square$

Com a conseqüència immediata d'aquest lema i del criteri de l'arrel, tenim:

Corol·lari 4.1.13. *Sigui* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una sèrie numèrica i suposem que existeix* $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: l \in \mathbb{R}$. *Aleshores:*

(a) *Si* $l < 1$, *la sèrie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *és absolutament convergent.*

(b) *Si* $l > 1$, *la sèrie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *és divergent.*

4.2 Radi i domini de convergència. Teorema d'Abel

Definició 4.2.1. Anomenarem *radi de convergència* de la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ al valor

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Definició 4.2.2. Anomenarem *domini de convergència* de la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ al conjunt:

$$D := \{t \in \mathbb{R} : \text{ la sèrie numèrica } \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{ convergeix}\}$$

El següent resultat relaciona aquests dos conceptes:

Teorema 4.2.3. *Siguin* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una sèrie de potències i* R *el seu radi de convergència. Aleshores:*

[2] Hem omès alguns detalls. Per exemple, s'hauria de veure que si $a > 0$ llavors $(\sqrt[n]{a})_n \xrightarrow{n} 1$ (es pot pensar com una conseqüència del Lema 4.3.2) i si $(b_n)_n \xrightarrow{n} 1$, llavors $(a^{b_n})_n \xrightarrow{n} a$

(a) *Si* $|t| < R$, *llavors la sèrie numèrica* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *convergeix absolutament.*

(b) *Si* $|t| > R$, *llavors la sèrie numèrica* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *divergeix.*

Demostració.

(a) Suposem que $|t| < R$. Tenim $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n t^n|} = \limsup\limits_{n\to+\infty} |t| \sqrt[n]{|a_n|} = |t| \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |t|/R < 1$. El criteri de l'arrel (cf. Teorema 4.1.11) ja decideix.

(b) Suposem que $|t| > R$. Tenim $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n t^n|} = \limsup\limits_{n\to+\infty} |t| \sqrt[n]{|a_n|} = |t| \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |t|/R > 1$. El criteri de l'arrel ja decideix.

□

Observacions 4.2.4.

- El teorema assegura que $(-R, R) \subseteq D \subseteq [-R, R]$, on D és el domini de convergència. No obstant, no podem dir si alguna de les inclusions és una igualtat o no.

- Si la sèrie de potències és de la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, fent el canvi $y = x - a$ obtenim una nova sèrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Aplicant el teorema, tenim $(-R, R) \subseteq D_y \subseteq [-R, R]$, on D_y és el domini de convergència d'aquesta última. Desfent el canvi, però, tenim $(a - R, a + R) \subseteq D_x \subseteq [a - R, a + R]$ on D_x és el domini de convergència de la sèrie inicial.

Teorema 4.2.5. *Siguin* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una sèrie de potències i* R *el seu radi de convergència. Aleshores* $\forall r \in (0, R)$, *la sèrie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *convergeix uniformement en* $[-r, r]$.

Demostració. Aplicarem el criteri M de Weierstrass (cf. Corol·lari 3.2.10), és a dir, veurem que la sèrie numèrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sup\limits_{x\in[-r,r]} |a_n x^n|$ convergeix.

Notem que per a cada $n \in \mathbb{N}$, la funció $f_n(x) = |x^n|$ és decreixent a $[-r, 0]$, creixent a $[0, r]$ i és $|r^n| = |(-r)^n| = r^n$. Per tant, $\sup\limits_{x\in[-r,r]} |a_n x^n| = |a_n| \sup\limits_{x\in[-r,r]} |x^n| = |a_n| r^n$. Això redueix el problema a provar que la sèrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ convergeix. Ens serà suficient el criteri de l'arrel:

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r/R < 1$$

□

Aquest darrer teorema ens permetrà aplicar alguns resultats del capítol anterior a les sèries de potències. Per exemple:

Corol·lari 4.2.6. *Siguin* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una sèrie de potències i* R *el seu radi de convergència. Aleshores la funció suma puntual de la sèrie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *és contínua a* $(-R, R)$.[3]

[3] A més a més, pel Teorema 2.4.5, la suma puntual és uniformement contínua a tot compacte $K \subseteq (-R, R)$

Demostració. Sigui $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$ la funció suma puntual de la sèrie, és a dir, la funció definida per $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Notem que la successió de sumes parcials és una successió de polinomis, en particular, de funcions contínues a $(-R, R)$. A més a més, convergeix uniformement a s en $[-r, r]$. Per tant, pel Teorema 3.3.3, les funcions $s_{|[-r,r]}$ són contínues $\forall r \in [0, R)$.

Ara, donat $x \in (-R, R)$, podem prendre $r \in [0, R)$ complint $x \in (-r, r)$ i, com que $s_{|[-r,r]}$ serà contínua a x, tindrem que s també ho serà. $\square$

Teorema 4.2.7 (Abel). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una sèrie de potències i R el seu radi de convergència. Aleshores:*

(a) *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ convergeix, llavors la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergeix uniformement en $[-r, R]$ $\forall r \in (0, R)$.*

(b) *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ convergeix, llavors la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergeix uniformement en $[-R, r]$ $\forall r \in (0, R)$.*

Si es compleixen (a) *i* (b)*, llavors la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergeix uniformement en $[-R, R]$.*

Demostració. Demostrarem només (a), ja que (b) surt anàlogament. Serà suficient veure que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergeix uniformement en $[0, R]$, perquè, pel Teorema 4.2.5, ja tenim que convergeix uniformement en $[-r, r]$ $\forall r \in (0, R)$ i, de la Definició 3.2.1, es dedueix immediatament que també hi hauria convergència uniforme a la unió, i.e., a $(-r, R]$, amb la qual cosa ja hauríem acabat.

Sigui $s : (-R, R] \to \mathbb{R}$ la funció suma puntual de la sèrie, $(s_n)_n$ la successió de sumes parcials i $(A_n)_n$ la successió amb terme general $A_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_n R^n$. Notem que:

(1) $(s_n(R))_n \xrightarrow{n} s(R) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és:

$$|s(R) - s_n(R)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k - \sum_{k=0}^{n} a_k R^k \right| \overset{1.4.11(c)}{=} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k R^k \right| = |A_{n+1}| < \varepsilon/2$$

(2) Pel Corol·lari 1.4.11(c), tenim que $\forall k \in \mathbb{N}$ és $a_k R^k = A_k - A_{k+1}$.

(3) Pel Lema 1.6.4, si $\lambda \in [0, 1]$, llavors $1 \geq \lambda^{k-1} \geq \lambda^k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}, k > 0$.

Provarem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és uniformement de Cauchy en $[0, R]$. Donat $\varepsilon > 0$, prenem el $n_0 \in \mathbb{N}$ donat per (1). Aleshores per a $n, m \geq n_0, m > n$ i $x \in [0, R]$ tenim que $\lambda := x/R \in [0, 1]$,

$x = \lambda R$ i

$$
\begin{aligned}
|s_m(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \lambda^k R^k \right| \overset{(2)}{=} \left| \sum_{k=n+1}^{m} \lambda^k (A_k - A_{k+1}) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \lambda^k A_k - \sum_{k=n+1}^{m} \lambda^k A_{k+1} \right| = \\
&= \left| \sum_{k=n+1}^{m} \lambda^k A_k - \sum_{k=n+2}^{m+1} \lambda^{k-1} k A_k \right| = \left| \lambda^{n+1} A_{n+1} - \lambda^m A_{m+1} + \sum_{k=n+2}^{m} (\lambda^k - \lambda^{k-1}) A_k \right| \leq \\
&\leq \sum_{k=n+2}^{m} |(\lambda^k - \lambda^{k-1}) A_k| + |\lambda^{n+1} A_{n+1}| + |\lambda^m A_{m+1}| \overset{(1)}{<} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{k=n+2}^{m} |\lambda^k - \lambda^{k-1}| + |\lambda^{n+1}| + |\lambda^m| \right) \overset{(3)}{=} \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{k=n+2}^{m} (\lambda^{k-1} - \lambda^k) + \lambda^{n+1} + \lambda^m \right) = \\
&= \frac{\varepsilon}{2} (\lambda^{n+1} - \lambda^{n+2} + \lambda^{n+2} - \lambda^{n+3} + \ldots + \lambda^{m-1} - \lambda^m + \lambda^{n+1} + \lambda^m) = \\
&= \frac{\varepsilon}{2} 2\lambda^{n+1} = \lambda^{n+1} \varepsilon \overset{(3)}{\leq} \varepsilon
\end{aligned}
$$

□

Observació 4.2.8. Gràcies a aquest resultat, hem reduït l'estudi de la convergència uniforme de sèries de potències al càlcul d'un límit (pel radi de convergència) i a estudiar la convergència de les sèries numèriques $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$. A més a més, podem generalitzar lleugerament el Corol·lari 4.2.6:

Corol·lari 4.2.9. *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una sèrie de potències i D el seu domini de convergència, aleshores la funció suma puntual és contínua a D.*

Demostració. En efecte, si R és el radi de convergència de la sèrie, llavors tindrem $D = (-R, R), (-R, R], [-R, R), [-R, R]$. El primer cas és el Corol·lari 4.2.6, mentre que els altres són conseqüència del Teorema d'Abel, del Teorema 3.3.3 i del fet que els polinomis són funcions contínues. □

4.3 Derivació de sèries de potències

En aquesta secció estudiarem la derivabilitat de les sèries de potències. Això potser no sembla complicat, però com veurem en els exercicis, moltes vegades resulta útil per calcular la suma de certes sèries de funcions i, en conseqüència, de certes sèries numèriques.

Lema 4.3.1. *Siguin $(a_n)_n \subseteq [0, +\infty), (b_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $\limsup_{n\to+\infty} a_n = a \geq 0$ i $\lim_{n\to+\infty} b_n = b > 0$. Aleshores $\limsup_{n\to+\infty} a_n b_n = ab$.*

Demostració. Sigui $0 < \varepsilon < b$, com que $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $0 < b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$. Per tant, per a $n \geq n_0$, tenim:

$$(b - \varepsilon) \sup_{k\geq n} a_k = \sup_{k\geq n} a_k (b - \varepsilon) \leq \sup_{k\geq n} a_k b_k \leq \sup_{k\geq n} a_k (b + \varepsilon) = (b + \varepsilon) \sup_{k\geq n} a_k$$

Això mostra, en particular, que la successió $\left(\sup_{k\geq n} a_k b_k \right)_n$ està acotada inferiorment. A més a més, per ser decreixent, té límit. Prenent $n \to +\infty$, tenim:

$$(b - \varepsilon) a \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n b_n \leq (b + \varepsilon) a \Rightarrow |\limsup_{n\to+\infty} a_n b_n - ab| \leq a\varepsilon$$

Com que això es compleix per a tot $\varepsilon \in (0, b)$, tenim que $\limsup_{n \to +\infty} a_n b_n = ab$. $\square$

Lema 4.3.2. $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Demostració. Posem $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Notem que per a $n > 1$ és

$$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

Per tant, $1 > \frac{n-1}{2} a_n^2$. En definitiva, $0 \leq a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ i, per la Regla del Sandwich, ja hem acabat. $\square$

Lema 4.3.3. *Siguin* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una sèrie de potències i* R *el seu radi de convergència. Aleshores la sèrie obtinguda derivant els termes de* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, és a dir,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$*, també té radi de convergència* R*.*

Demostració. Notem que les sèries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ tenen el mateix domini de convergència i, per tant, el mateix radi de convergència. Serà, doncs, suficient veure que $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n n|}$.

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n n|} = \limsup_{n \to +\infty} (\sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n}) \overset{4.3.1}{=} \left(\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right) \left(\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} \right) \overset{4.3.2}{=} \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$\square$

Aquest lema ja ens permet enunciar els següent resultat:

Teorema 4.3.4. *Siguin* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una sèrie de potències,* R *el seu radi de convergència i* $s, \bar{s} : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *les funcions suma puntual de* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$*, respectivament. Aleshores* s *és derivable a* $(-R, R)$ *i* $s' = \bar{s}$*.*

Demostració. Pel Teorema 4.2.5, tenim que per a tot $r \in (0, R)$ les dues sèries convergeixen uniformement en $[-r, r]$. Sigui $s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, es compleix que:

(1) $(s'_N)_N$ convergeix uniformement en $[-r, r]$.

(2) $s_N(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ i, per tant, $(s_N(0))_N$ convergeix.

Pel Teorema de derivació i convergència uniforme (3.4.1), existeix $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ derivable tal que $s_N \rightrightarrows f$ i $s'_N \rightrightarrows f'$ en $[-r, r]$. En particular, $\lim_{N \to +\infty} s_N(x) = s(x) = f(x)$ i $\lim_{N \to +\infty} s'_N(x) = \bar{s}(x) = f'(x)$.
Això demostra que $s' = \bar{s}$ a $[-r, r]$ $\forall r \in (0, R)$. Però donat $x \in (-R, R)$, $x \neq 0$ és $x \in [-|x|, |x|]$ amb $|x| \in (0, R)$, per tant, $s'(x) = \bar{s}(x)$. En definitiva, $s' = \bar{s}$ a $(-R, R)$. $\square$

Corol·lari 4.3.5. *Siguin* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una sèrie de potències,* R *el seu radi de convergència i* $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *la funció suma puntual de* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*. Aleshores* $s \in \mathcal{C}^{\infty}((-R, R))$ *i*

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

Demostració. Inducció i Teorema 4.3.4. □

Observació 4.3.6. Notem que $a_n = \frac{s^{(k)}(0)}{n!}$. Per tant, si una certa funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és suma puntual d'una sèrie de potències centrada en 0, aquesta sèrie queda totalment determinada per la relació anterior i és:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^n$$

No obstant, no totes les funcions indefinidament derivables poden ser suma puntual d'una sèrie de potències, amb la qual cosa no sempre podrem escriure la igualtat anterior. Anomenarem *funcions analítiques* a aquelles que sí poden ser suma puntual.

Exercicis

4.1. Estudieu la convergència i calculeu la suma en el corresponent domini de convergència de les següents potències:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$

4.2. Estudieu la convergència i calculeu la suma en el corresponent domini de convergència de la següent sèrie de potències:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

4.3. (a) Estudieu la convergència puntual i uniforme de la següent sèrie de potències:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

Estudieu la convergència en els extrems del domini de convergència.

(b) Trobeu la suma de la sèrie.

(c) Quin és el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n 9^n}$?

4.4. (a) Demostreu que el radi de convergència de la següent sèrie de potències és 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

(b) Demostreu que la suma de la sèrie és la funció $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(x^2+1) \arctan x$$

(c) Demostreu que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$$

4.5. (a) Estudieu la convergència de la sèrie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nx^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

Estudieu la convergència en els extrems del domini de convergència.

(b) Si f denota la seva suma, demostreu que per a cada $|x|<1$ és

$$x^2\int_0^x \frac{1}{t}f'(t)dt = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

4.6. Estudieu la convergència i calculeu la suma en el corresponent domini de convergència de la sèrie de potències:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4n+1}$$

Calculeu el valor de $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{4n}(4n+1)}$.

4.7. Sigui $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-n-3}{n+1}x^n$.

(a) Estudieu la convergència puntual i uniforme de la sèrie.

(b) Calculeu la suma de la sèrie de potències en el seu domini.

4.8. Considerem la sèrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos^{n+1}x}{n+1}$.

(a) Estudieu la convergència puntual en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Estudieu la convergència uniforme en $\left[a,\frac{\pi}{2}\right]$, $a>0$.

(c) Calculeu, en els punts on la sèrie és convergent, el valor de la suma.

Exercicis resolts

Capítol 1: Els nombres reals

1.1. Siguin $x, y \in \mathbb{K}$. Demostreu que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Sol. Utilitzant la desigualtat triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$ amb $a = x - y$ i $b = y$, tenim $|x| \leq |x - y| + |y|$, i.e., $|x| - |y| \leq |x - y|$. Canviant els papers de x i y, tenim $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. En definitiva, $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$.

1.2. Siguin $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. Demostreu que $|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$.

Sol. El cas $n = 2$ és la desigualtat triangular. Suposem-ho cert per a $n \in \mathbb{N}$. Si $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$, llavors:

$$|x_1 + \ldots + x_{n+1}| = |(x_1 + \ldots + x_n) + x_{n+1}| \leq |x_1 + \ldots + x_n| + |x_{n+1}| \leq |x_1| + \ldots + |x_{n+1}|$$

On a la primera desigualtat s'ha aplicat la desigualtat triangular i a la segona, la hipòtesi d'inducció i (b5).

1.3. Siguin $x, y \in \mathbb{K}$ amb $0 < y < x$. Demostreu que per a tot $n \geq 1$ és:

$$\frac{n+1}{n} y \overset{(2)}{<} \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x^n - y^n} \overset{(1)}{<} \frac{n+1}{n} x$$

Sol. Provem primer (1). Posem $q := y/x < 1$. Tenim:

$$\begin{aligned} S := \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x^n - y^n} &= \frac{x^{n+1}(1 - q^{n+1})}{x^n(1 - q^n)} = \\ &= x\frac{(1-q)(1 + q + \ldots + q^n)}{(1-q)(1 + q + \ldots q^{n-1})} = x\left(1 + \frac{q^n}{1 + q + \ldots + q^{n-1}}\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

Posem $\lambda := \dfrac{q^n}{1 + q + \ldots + q^{n-1}}$. Aleshores:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1 + q + \ldots + q^{n-1}}{q^n} = \frac{1}{q^n} + \ldots + \frac{1}{q} > 1 + \overset{n}{\ldots} + 1 = n \Rightarrow \lambda < \frac{1}{n}$$

On a la desigualtat s'ha utilitzat que $q < 1$. Tornant a $(*)$, tenim $S < x\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n+1}{n}x$, com volíem veure.

Per provar (2) raonarem de forma semblant. Posem $Q := x/y > 1$. Tenim:

$$\begin{aligned} S = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x^n - y^n} &= \frac{y^{n+1}(Q^{n+1} - 1}{y^n(Q^n - 1)} = \\ &= y\frac{(Q-1)(1 + Q + \ldots + Q^n)}{(Q-1)(1 + Q + \ldots Q^{n-1})} = y\left(1 + \frac{Q^n}{1 + Q + \ldots + Q^{n-1}}\right) \qquad (**) \end{aligned}$$

Posem $\Lambda := \dfrac{Q^n}{1 + Q + \ldots + Q^{n-1}}$. Aleshores:

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{1 + Q + \ldots + Q^{n-1}}{Q^n} = \frac{1}{Q^n} + \ldots + \frac{1}{Q} < 1 + \overset{n}{\ldots} + 1 = n \Rightarrow \Lambda > \frac{1}{n}$$

On a la desigualtat s'ha utilitzat que $Q > 1$. Tornant a $(**)$, tenim $S > y\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n}y$.

1.4. Sigui $A \subseteq \mathbb{K}$, demostreu que si A té mínim, aquest és únic i que si té màxim aquest és únic. Deduïu l'anàleg per a ínfim i suprem. Denotarem per $\sup A$ al suprem de A (si existeix) i $\inf A$ a l'ínfim de A (si existeix).

Sol. Si A té mínims $a, a' \in A$, llavors $a \leq a'$ i $a' \leq a$, per tant, $a = a'$. El mateix raonament s'aplica als màxims.
Si existeix l'ínfim de A, llavors és únic perquè es defineix com el mínim del conjunt de les cotes superiors i el mínim, com acabem de veure, és únic. El mateix raonament s'aplica al suprem.

1.5. Siguin $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{K}$ i $\alpha \in \mathbb{K}$. Demostreu que α és l'ínfim de A si, i només si, es compleix:

(1) α és cota inferior de A.

(2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}\ \exists x \in A$ tal que $\alpha \leq x < \alpha + \varepsilon$

Enuncieu i proveu el resultat anàleg per al suprem.

Sol. Si $\alpha = \inf A$, aleshores es compleix (1) immediatament. Sigui $\varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}$, aleshores $\alpha < \alpha + \varepsilon$ i, per tant, $\alpha + \varepsilon$ no pot ser cota inferior. Això vol dir que existeix $x \in A$ tal que $x < \alpha + \varepsilon$. La part $\alpha \leq x$ és evident perquè α és cota inferior.

Recíprocament, si α compleix (1) i (2), aleshores és cota inferior de A. Cal veure que és la més gran de les cotes inferiors. Suposem que $\beta \in \mathbb{K}$ una cota inferior més gran que α. Aleshores per a $\varepsilon := \beta - \alpha > 0$ existeix $x \in A$ tal que $x < \alpha + \varepsilon = \alpha + \beta - \alpha = \beta$, amb la qual cosa β no seria cota inferior de A, contradicció.

Pel suprem tenim que $\alpha = \sup A$ si, i només si, es compleix:

(1) α és cota superior de A.

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.

La demostració és completament anàloga.

1.6. Siguin $A, B \subseteq \mathbb{K}$ i $C := \{x + y \in \mathbb{K} : x \in A, y \in B\}$. Demostreu que:

(a) Si A té suprem, aleshores $-A := \{-a : a \in A\}$ té ínfim i $\inf(-A) = -\sup A$.

Sol. Comprovem les propietats (1) i (2) de l'exercici anterior amb $\alpha = -\sup A$ i el conjunt $-A$:

(1) Sigui $x \in -A$, aleshores $-x \in A$. Per tant, $-x \leq \sup A$, i.e. $x \geq -\sup A$.

(2) Sigui $\varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}$, aleshores $\exists x \in A$ tal que $\sup A - \varepsilon < x \leq \sup A$, és a dir, $-\sup A \leq -x < -\sup A + \varepsilon$.

(b) Si A té ínfim, aleshores $-A := \{-a : a \in A\}$ té suprem i $\sup(-A) = -\inf A$.

Sol. Comprovem les propietats (1) i (2) de l'exercici anterior amb $\alpha = -\inf A$ i el conjunt $-A$:

(1) Sigui $x \in -A$, aleshores $-x \in A$. Per tant, $-x \geq \inf A$, i.e. $x \leq -\inf A$.

(2) Sigui $\varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}$, aleshores $\exists x \in A$ tal que $\inf A \leq x < \inf A + \varepsilon$, és a dir, $-\inf A - \varepsilon < -x \leq -\inf A$.

(c) Si A i B tenen ínfim, aleshores C també i $\inf C = \inf A + \inf B$.

Sol. Comprovem de nou (1) i (2).

(1) Sigui $x + y \in C$, $x \in A, y \in B$, aleshores $x \geq \inf A$ i $y \geq \inf B$, per tant, $x + y \geq \inf A + \inf B$

(2) Sigui $\varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}$, aleshores existeixen $x \in A, y \in B$ tals que

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf A \leq x < \inf A + \varepsilon/2 \\ \inf B \leq y < \inf B + \varepsilon/2 \end{array} \right\} \Rightarrow (\inf A + \inf B) \leq x + y < (\inf A + \inf B) + \varepsilon$$

(d) Si A i B tenen suprem, aleshores C també i $\sup\, C = \sup\, A+ \sup\, B$.

Sol. Per l'apartat (a), $-A$ i $-B$ tenen ínfim. Notem que $-C = \{x+y : x \in -A, y \in -B\}$. Per tant, per l'apartat (c), $-C$ té ínfim i $\inf(-C) = \inf(-A) + \inf(-B)$. Per l'apartat (b), $-(-C) = C$ té suprem i $\sup C = -\inf(-C)$. Substituint, obtenim $-\sup C = -\sup A - \sup B$, i.e. $\sup C = \sup A + \sup B$.

(e) Si $\lambda \in \mathbb{K}_{>0}$, $A_\lambda := \{\lambda \cdot x : x \in A\}$ i A té suprem, aleshores A_λ també en té i $\sup A_\lambda = \lambda \cdot \sup A$.

Sol. Tornem a comprovar (1) i (2):

(1) Sigui $\lambda x \in A_\lambda$, $x \in A, \lambda \in \mathbb{K}_{>0}$, aleshores $x \leq \sup A$, per tant, $\lambda x \leq \lambda \sup A$

(2) Sigui $\varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}$, aleshores existeix $x \in A$ tal que $\sup A - \dfrac{\varepsilon}{\lambda} < x \leq \sup A$. Per tant, $\lambda \sup A - \varepsilon < x \leq \lambda \sup A$.

1.7. Anomenarem valor absolut a $\mathbb{Q}$ a tota aplicació $\|\cdot\| : \mathbb{Q} \longrightarrow [0, +\infty)$ que compleix:

(1) $\|x\| = 0$ si, i només si, $x = 0$

(2) $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Demostreu que:

(a) $\|1\| = \|-1\| = 1$.

Sol. $\|1\| = \|1\| \cdot 1\| \overset{(2)}{=} \|1\| \cdot \|1\| = \|1\|^2 \Rightarrow 0 = \|1\|^2 - \|1\| = \|1\|(\|1\| - 1) \overset{\|1\|\neq 0}{\Longrightarrow} \|1\| = 1$.

$\|1\| = \|(-1)(-1)\| \overset{(2)}{=} \|(-1)\| \cdot \|(-1)\| = \|(-1)\|^2$. Per tant:
$1 = \|(-1)\|^2 \Rightarrow \sqrt{1} = \sqrt{\|(-1)\|^2} \Rightarrow 1 = \|(-1)\|$.

(b) Si es compleix $\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$, aleshores si $b \in D(a,r) := \{x \in \mathbb{Q} : \|a-x\| < r\}$, tenim que $D(a,r) = D(b,r)$.

Sol. Sigui $b \in D(a,r)$, volem veure que $D(a,r) = D(b,r)$.
$\subseteq$: Sigui $z \in D(a,r)$, aleshores $\|z-b\| = \|(z-a)+(a-b)\| \leq \max(\|z-a\|, \|a-b\|) < r$, perquè $z \in D(a,r)$ i $b \in D(a,r)$. Per tant, $z \in D(b,r)$.
$\supseteq$: Intercanviant a per b a la inclusió anterior.

(c) Si es compleix $\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$, aleshores $\|n\| \leq 1\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Sol. Notem que $\|x\| \overset{(a)}{=} \|x\| \cdots \|-1\| \overset{(2)}{=} \|x(-1)\| = \|-x\|$. Per tant, hi ha prou provant-ho per a $n \geq 1$.

- Per a $n = 0$: $\|0\| \overset{(1)}{=} 0 \leq 1$
- Hipòtesi d'inducció: $\|n\| \leq 1$.
  $\|n+1\| \leq \max(\|n\|, \|1\|) \leq \max(1,1) = 1$.

(d) El recíproc de l'apartat (c).

Sol.

$$\|x+y\|^N \overset{(2)}{=} \|(x+y)^N\| = \left\| \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{N-k} \right\| \overset{(3)}{\leq} \sum_{k=0}^{N} \left\| \binom{N}{k} x^k y^{N-k} \right\| \overset{(2)}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \left\| \binom{N}{k} \right\| \cdot \|x^k\| \cdot \|y^{N-k}\| \overset{\binom{N}{k} \leq 1}{\leq} \sum_{k=0}^{N} \|x\|^k \|y\|^{N-k} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} \max(\|x\|, \|y\|)^k \cdot \max(\|x\|, \|y\|)^{N-k} = (N+1) \max(\|x\|, \|y\|)^N$$

Per tant, $\forall N \geq 1$ és $\|x+y\| \leq \sqrt[N]{N+1} \cdot \max(\|x\|, \|y\|)$. Pel Lema 4.3.2, tenim que $(\sqrt[N]{N+1})_N \xrightarrow{N} 1$.
En definitiva, passant al límit obtenim el que volíem: $\|x+y\| \leq \max(\|x\||, \|y\|)$.

1.8. Sigui $(A_n)_n$ una successió de subconjunts no buits de $\mathbb{R}$ acotats superiorment i tal que $A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Posem $s_n := \sup A_n$. Demostreu que $(s_n)_n$ convergeix si, i només si, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ està acotat superiorment i, en aquest cas, $(s_n)_n \xrightarrow{n} \sup A$.

Sol. $\Rightarrow$: Notem que $(s_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ és una successió creixent i convergent. En particular, està acotada superiorment i $\lim_n s_n \overset{1.5.11}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n =: s$. Veiem que $s = \sup A$.

(a) s és cota superior de A: Sigui $x \in A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, llavors existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{n_0}$. Per tant, $x \leq \sup A_{n_0} = s_{n_0} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n = s$

(b) s és la menor de les cotes superiors de A: Sigui $\beta \in \mathbb{R}$ una cota superior de A. Aleshores és, en particular, cota superior de $A_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Per tant, $s_n = \sup A_n \leq \beta$ i, passant al límit o per definició de suprem, $s \leq \beta$.

$\Leftarrow$: Per la Proposició 1.5.11 serà suficient veure que la successió $(s_n)_n$ està acotada superiorment. Com que A està acotat superiorment, podem posar $\alpha := \sup A$. Però llavors α és cota superior de $A_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, per tant, $s_n = \sup A_n \leq \alpha$, i.e. α és cota superior de $(s_n)_n$.

1.9. Per a quins $\alpha \in \mathbb{R}$ es pot afirmar que tota successió $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}$ complint

$$|x_{n+1} - x_n| \leq n^\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

convergeix?

Sol. Notem que si $\alpha \geq -1$, podem triar $x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ i es compleix

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = n^{-1} \leq n^\alpha$$

Però ja és conegut que la successió $(x_n)_n$ no convergeix.
Provarem que sí és cert per a $\alpha < -1$. Suposem que $(x_n)_n$ compleix la hipòtesi. Aleshores serà suficient veure que $(x_n)_n$ és de Cauchy. Siguin $\varepsilon > 0$ i $n, m \in \mathbb{N}, m > n$, llavors:

$$|x_m - x_n| \overset{1.2.}{\leq} |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \ldots + |x_m - x_{m-1}| \leq n^\alpha + (n+1)^\alpha + \ldots + (m-1)^\alpha \quad (*)$$

Definim $s_n := \sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha$. Com que $\alpha < -1$, la successió $(s_n)_n$ convergeix (es pot veure, per exemple, amb el criteri de la integral fet a *Introducció al Càlcul Integral*). En particular, $(s_n)_n$ és de Cauchy. Per tant, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m > n \geq n_0$ és $s_m - s_n = n^\alpha + (n+1)^\alpha + \ldots + (m-1)^\alpha < \varepsilon$. Tornant a $(*)$, hem provat que $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

1.10. Sigui $(x_n)_n$ una successió de nombres reals.

(a) Suposem que existeixen $\rho \in (0,1), M > 0$ i $p \in \mathbb{N}$ complint que $|x_{n+1} - x_n| \leq M\rho^n$ per a tot $n \geq p$. Demostreu que la successió $(x_n)_n$ és convergent.

Sol. Serà suficient veure que $(x_n)_n$ és de Cauchy. Sigui $\varepsilon > 0$. Per a $m > n \geq p$, tenim:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\overset{1.2.}{\leq} |x_m - x_{m-1}| + \ldots |x_{n+1} - x_n| \leq M\rho^{m-1} + \ldots + M\rho^n = \\ &= M\rho^n(\rho^{m-n-1} + \rho^{m-n-2} + \ldots + \rho + 1) = M\rho^n \frac{1 - \rho^{m-n}}{1 - \rho} \leq \frac{M}{1 - \rho}\rho^n \end{aligned}$$

Com que $(\rho^n)_n \xrightarrow{n} 0$, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^n < \frac{1-\rho}{M}\varepsilon$. Posant $n_0 := \max(p, n_1)$, tenim que $\forall m > n \geq n_0$ és

$$|x_m - x_n| < \frac{M}{1-\rho}\frac{1-\rho}{M}\varepsilon = \varepsilon$$

(b) Suposem que existeixen $\rho \in (0,1)$ i $p \in \mathbb{N}$ complint que $|x_{n+1} - x_n| \leq \rho|x_n - x_{n-1}|$ per a tot $n \geq p$. Demostreu que la successió $(x_n)_n$ és convergent.

Sol. Definim $\bar{M} := |x_p - x_{p-1}|$.
Per a $n = p$ és $|x_{n+1} - x_n| \leq \rho|x_p - x_{p-1}| = \rho\bar{M} = \rho^{n-p+1}\bar{M}$.
Suposem que per a $n \in \mathbb{N}$ és $|x_{n+1} - x_n| \leq \rho^{n-p+1}\bar{M}$. Aleshores:

$$|x_{(n+1)+1} - x_{n+1}| = |x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \rho|x_{n+1} - x_n| \leq \rho^{n-p+2}\bar{M} = \rho^{(n+1)-p+1}\bar{M}$$

Això demostra que $|x_{n+1} - x_n| \leq \bar{M}\rho^{n-p+1}$, $\forall n \geq p$. Posant $M := \bar{M}\rho^{p-1} > 0$, observem que es compleix l'enunciat de l'apartat (a). Per tant, $(x_n)_n$ és convergent.

1.11. Demostreu que si una successió $(a_n)_n$ de nombres reals no està acotada superiorment, aleshores té una parcial $(a_{n_k})_k \vdash (a_n)_n$ tal que $a_{n_k} \xrightarrow{k} +\infty$.

Sol. Com que $(a_n)_n$ no està acotada, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_1} > 1$. Triem el n_1 més petit possible.
Suposem que tenim $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ complint $a_{n_i} > i$ $\forall i = 1, \ldots, k$. Aleshores triem $n_{k+1} := \min\{m \in \mathbb{N} : a_m > k+1 \text{ i } m > n_k\}$ [1] (el conjunt és no buit perquè $(a_n)_{n>n_k}$ no està acotada).
Hem construït així una successió $(n_k)_k$ estrictament creixent. Veiem que $(a_{n_k})_k \vdash (a_n)$ té límit $+\infty$. Donat $M > 0$, triem $k_0 := \lceil M \rceil$. Aleshores per a $k \geq k_0$ és

$$a_{n_k} > k \geq k_0 \geq M$$

1.12. Sigui $(x_n)_n$ una successió de nombres reals acotada. Considerem les successions $(y_n)_n$ i $(z_n)_n$ amb termes generals $y_n := \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ i $z_n := \max\{x_1, \ldots, x_n\}$. Demostreu que $(y_n)_n$ i $(z_n)_n$ convergeixen i que $\lim y_n \leq \lim z_n$.

Sol. Com que $(x_n)_n$ és acotada, es té immediatament que $(y_n)_n$ i $(z_n)_n$ també ho són. D'altra banda, observem que $(y_n)_n$ és decreixent i $(z_n)_n$ és creixent. Per la Proposició 1.5.11, convergeixen a $I := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ i a $S := \sup\limits_{x\in\mathbb{N}} z_n$, respectivament.
Finalment, només cal observar que

$$I \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq S,$$

ja que $y_n \leq x_n \leq z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1.13. 1) Sigui $(m_n)_n$ una successió d'enters. Demostreu que si $(m_n)_n$ és una successió de Cauchy, llavors existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$, és $m_n = m_{n_0}$. En particular, podem dir que tota successió d'enters i de Cauchy és convergent en $\mathbb{Z}$.

Sol. Tot i que no s'ha especificat, aplicarem la definició de successió de Cauchy amb $\mathbb{K} = \mathbb{R}$[2] (cf. Definició 1.4.14).
Per a $\varepsilon = 1$, tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és

$$|m_n - m_{n_0}| < 1 \Rightarrow -1 < m_n - m_{n_0} < 1 \overset{m_n - m_{n_0} \in \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} m_n - m_{n_0} = 0 \Rightarrow m_n = m_{n_0}$$

2) Siguin $(p_n)_n$ i $(q_n)_n$ successions de nombres enters no nuls tals que $(q_n)_n$ és acotada i $(p_n/q_n)_n$ convergeix cap a $x \in \mathbb{R}$. Demostreu que $x \in \mathbb{Q}$.

Sol. L'estratègia consistirà en construir una parcial $(q_{n_k})_k \vdash (q_n)_n$ que sigui constant, prendre la parcial $(p_{n_k}/q_{n_k})_k \vdash (p_n/q_n)_n$, observar que convergeix cap a x i utilitzar l'apartat (1) per acabar veient que $x \in \mathbb{Q}$.
Definim $A := \{q_n \in \mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}\}$. Com que $(q_n)_n$ és acotada, tenim que A també ho és. Per tant, existeix $M \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall q \in A$ és $-M \leq q \leq M$.

[1] Notem que estem donant una elecció explícita per als n_k. Per tant, té sentit dir que no necessitem l'axioma de l'elecció.

[2] També es pot prendre $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ i el resultat no canvia

Per a $N = -M, \dots, -1, 0, 1, \dots, M$, definim $B_N := \{n \in \mathbb{N} : q_n = N\}$. Notem que ha de ser

$$\bigcup_{N=-M}^{M} B_N = \mathbb{N}$$

Observem que la unió de l'esquerra és finita, però el conjunt de la dreta és infinit. Això implica que algun dels B_N és infinit, diguem-li B_q.
Definim de forma recurrent una successió $(n_k)_k$ de naturals estrictament creixent per:

$$n_1 := \min B_q \qquad n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} : q_n = q, n > n_k\}$$

Així ja tenim la parcial constant $(q_{n_k})_k = (q)_k$ que volíem. Com que $(p_n/q_n)_n \xrightarrow{n} x$, tenim que $(p_{n_k}/q_{n_k})_k \xrightarrow{k} x$. Però $p_{n_k}/q_{n_k} = p_{n_k}/q$, la qual cosa implica que $(p_{n_k})_k \xrightarrow{k} q \cdot x$. En particular, $(p_{n_k})_k$ és de Cauchy i, per l'apartat (a), convergeix en $\mathbb{Z}$, i.e. $q \cdot x = p \in \mathbb{Z}$, o sigui $x = p/q \in \mathbb{Q}$.

1.14. Siguin $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(x_n)_n$ successions de nombre reals complint:

(a) Per a tot $k \geq 1, a_k < b_k$.

(b) $(b_k - a_k)_k \xrightarrow{k} 0$

(c) Per a tot $k \geq 1$, el conjunt $A_k = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin (a_k, b_k)\}$ és finit.

Demostreu:

1) La successió $(x_n)_n$ és convergent.

Sol. Com que els A_k són finits, podem definir $M_k := \max A_k + 1 \ \forall k \geq 1$.
Sigui $\varepsilon > 0$, per (b) tenim que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_{n_0} - a_{n_0}| \overset{(a)}{=} b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Aleshores per a tots $n, m \geq M_{n_0}$ tindrem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_n \in (a_{n_0}, b_{n_0}) & \Rightarrow a_{n_0} < x_n < b_{n_0} \\ x_m \in (a_{n_0}, b_{n_0}) & \Rightarrow a_{n_0} < x_m < b_{n_0} \Rightarrow -b_{n_0} < -x_m < -a_{n_0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n_0} - b_{n_0} < x_n - x_m < b_{n_0} - a_{n_0} \Rightarrow |x_n - x_m| < b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$$

Això demostra que $(x_n)_n$ és de Cauchy i, per tant, convergent.

2) Si $x = \lim_n x_n$, llavors $a_k \leq x \leq b_k$ per a tot $k \geq 1$.

Sol. Sigui $k \geq 1$, aleshores per (c) tenim que $\forall n \geq M_k$ és $a_k < x_n < b_k$. Fent $n \to +\infty$ i aplicant la Proposició 1.4.12 obtenim $a_k \leq x \leq b_k$.

3) $\lim_n a_k = \lim_n b_k = x$.

Sol. Restant a_k a les desigualtats de l'apartat anterior, tenim $0 < x - a_k < b_k - a_k$. Per la Regla del Sandwich, $(x - a_k)_k$ convergeix cap a 0. Ara només cal notar que $a_k = x - (x - a_k)$, on $(x)_n$ i $(x - a_k)_k$ convergeixen cap a x i 0, respectivament. Pel Corol·lari 1.4.11(c), serà $(a_k)_k \xrightarrow{k} x$.
D'altra banda, podem posar $b_k = (b_k - a_k) + a_k$ i, aplicant el mateix corol·lari, obtenim $(b_k)_k \xrightarrow{k} x$.

Capítol 2: Espais mètrics

2.1. Siguin $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$ l'espai mètric de l'Exemple 2.1.2, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ l'espai mètric habitual dels reals i

$$\begin{aligned} F : \mathcal{C}([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

Demostreu que F és contínua a tot $\mathcal{C}([0,1])$.

Sol. Siguin $g \in \mathcal{C}([0,1])$ i $\varepsilon > 0$, volem veure que existeix $\delta > 0$ tal que

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1]) \text{ és } d_\infty(f,g) < \delta \Rightarrow \left| \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \right| < \varepsilon$$

Però si $d_\infty(f,g) < \delta$, llavors:

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \right| \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f,g) < \delta$$

Per tant, tenim prou triant $\delta := \varepsilon$[3].

2.2. Sigui $(x_n)_n$ una successió a un espai mètric (X,d). Demostreu que $(x_n)_n$ convergeix cap a $x \in X$ si, i només si, tota parcial de $(x_n)_n$ convergeix cap a x.

Sol. De dreta a esquerra és evident perquè la pròpia successió $(x_n)_n$ és una parcial de si mateixa.
Recíprocament, suposem que $(x_{n_k})_k \vdash (x_n)_n$ i que $(x_n)_n$ convergeix cap a x. Sigui $\varepsilon > 0$, llavors existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $|x_n - x| < \varepsilon$. Triem $k_0 \in \mathbb{N}$ complint $n_{k_0} \geq n_0$. Aleshores $\forall k \geq k_0$ tindrem $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$, per tant, $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$.

2.3. Sigui $(x_n)_n$ una successió de Cauchy a un espai mètric (X,d). Demostreu que si la successió $(x_n)_n$ té una parcial convergent cap a $x \in X$, aleshores $(x_n)_n$ convergeix cap a x.

Sol. Suposem que $(x_{n_k})_k$ convergeix cap a x. Sigui $\varepsilon > 0$, tenim:

(1) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$ és $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$.

(2) $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0$ és $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$.

Triem $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq \max(n_0, n_{k_0})$. Aleshores $\forall n \geq n_0$ és

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

[3] Notem que com que el δ escollit no depèn de g, podem afirmar que la funció F és uniformement contínua

2.4. Sigui $(x_n)_n$ una successió a un espai mètric (X,d).

(a) Demostreu que si $(x_n)_n$ convergeix cap a $x \in X$, llavors les successions $(x_{2n})_n$ i $(x_{2n+1})_n$ també convergeixen cap a x.

Sol. Exercici **2.2.**

(b) Si $(x_{2n})_n$ i $(x_{2n+1})_n$ són convergents es pot assegurar que $(x_n)_n$ és convergent?

Sol. No. Per exemple, $x_n := (-1)^n$. Es té que $x_{2n} = 1$ i $x_{2n+1} = -1$. Totes dues convergeixen, però $(x_n)_n$ no convergeix.

(c) Si $(x_{2n})_n$ i $(x_{2n+1})_n$ són convergents cap a $x \in X$, demostreu que $(x_n)_n$ també ho és.

Sol. Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores:

(1) $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_1$ és $d(x_{2k}, x) < \varepsilon$

(2) $\exists k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_2$ és $d(x_{2k+1}, x) < \varepsilon$

Posem $n_0 := \max(2k_1, 2k_2 + 1)$. Llavors per a $n \geq n_0$ tenim dos casos:

- n parell $\Rightarrow n = 2k \Rightarrow 2k \geq n_0 \geq 2k_1 \Rightarrow k \geq k_1 \Rightarrow d(x_n, x) = d(x_{2k}, x) < \varepsilon$
- n senar $\Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow 2k + 1 \geq n_0 \geq 2k_2 + 1 \Rightarrow k \geq k_2 \Rightarrow d(x_n, x) = d(x_{2k+1}, x) < \varepsilon$

(d) Més generalment, demostreu que si existeixen dues successions parcials $(x_{\sigma(n)})_n$, $(x_{s(n)})_n$ que convergeixen cap a $x \in X$ i compleixen $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, aleshores $(x_n)_n$ també convergeix cap a x.

Sol. Notem que per tal que $(x_{\sigma(n)})_n, (x_{s(n)})_n$ siguin parcials de $(x_n)_n$, σ i s han de ser estrictament creixents. Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores:

(1) $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_1$ és $d(x_{\sigma(k)}, x) < \varepsilon$

(2) $\exists k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_2$ és $d(x_{s(k)}, x) < \varepsilon$

Posem $n_0 := \max(\sigma(k_1), s(k_2))$. Llavors per a $n \geq n_0$ tenim dos casos:

- $n \in \sigma(\mathbb{N}) \Rightarrow n = \sigma(k) \Rightarrow \sigma(k) \geq n_0 \geq \sigma(k_1) \Rightarrow k \geq k_1 \Rightarrow d(x_n, x) = d(x_{\sigma(k)}, x) < \varepsilon$
- $n \notin \sigma(\mathbb{N}) \Rightarrow n \in s(\mathbb{N}) \Rightarrow n = s(k) \Rightarrow s(k) \geq n_0 \geq s(k_2) \Rightarrow k \geq k_2 \Rightarrow d(x_n, x) = d(x_{s(k)}, x) < \varepsilon$

2.5. Sigui $(x_n)_n$ una successió a un espai mètric (X,d) de manera que les parcials $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$, $(x_{3n})_n$ convergeixen. Demostreu que $(x_n)_n$ convergeix.

Sol. Posem $l := \lim_n x_{2n}$, $l' := \lim_n x_{2n+1}$, $l'' := \lim_n x_{3n}$.
Per l'apartat (c) de l'exercici anterior, només cal veure que $l = l'$. Observem que $(x_{6n})_n$ és una parcial de $(x_{2n})_n$ i de $(x_{3n})_n$. Per l'exercici **2.2.**, $(x_{6n})_n$ tindrà límits l i l'' i, per la unicitat del límit, serà $l = l''$.
De forma semblant, $(x_{3(2n+1)})_n$ és una parcial de $(x_{2n+1})_n$ i de $(x_{3n})_n$. Pel mateix argument, tenim $l' = l''$.

En definitiva, $l = l'' = l'$.

2.6. Sigui $(x_n)_n$ una successió a un espai mètric (X, d).

(a) Si tota parcial de $(x_n)_n$ té una parcial convergent, podem afirmar que $(x_n)_n$ és convergent?

Sol. No. Per exemple, $x_n := (-1)^n$. Ja sabem que $(x_n)_n$ no convergeix, però donada una parcial $(x_{n_k})_k$ hi ha infinits $k \in \mathbb{N}$ que compleixen $x_{n_k} = 1$ o bé hi ha infinits $k \in \mathbb{N}$ que compleixen $x_{n_k} = -1$. En qualsevol, cas podem construir una parcial constant de $(x_{n_k})_k$ a l'estil de l'exercici **1.13.**(b).

(b) Sigui $x \in X$. Demostreu que si tota parcial de $(x_n)_n$ té una parcial que convergeix cap a $x \in X$, aleshores $(x_n)_n$ té límit x.

Sol. Per reducció a l'absurd. Suposem que $(x_n)_n \nrightarrow x$. Aleshores existeix $\varepsilon > 0$ tal que $\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0$ complint $d(x_n, x) \geq \varepsilon \quad (*)$.
Construirem una parcial $(x_{n_k})_k$ amb la propietat $d(x_{n_k}, x) \geq \varepsilon\ \forall k \in \mathbb{N}$, amb la qual cosa no hi hauria cap parcial de $(x_{n_k})_k$ que convergeixi cap a x i això suposaria una contradicció.
Definim $(n_k)_k$ de forma recurrent per:

$$n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \geq \varepsilon\} \qquad n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \geq \varepsilon, n > n_k\}$$

Notem que $(*)$ afirma que tots aquests conjunts són no buits i, per tant, té sentit prendre els mínims. Així ja tenim la parcial $(x_{n_k})_k \vdash (x_n)_n$ que volíem.

2.7. Sigui $(x_n)_n$ una successió a un espai mètric (X, d) i sigui $\varepsilon_n := d(x_n, x_{n+1})$, per a $n \geq 0$.

(a) Demostreu que si $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$, llavors $(x_n)_n$ és una successió de Cauchy.

Sol. Afirmem que la cua de la sèrie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k$ convergeix cap a 0. En efecte, si $\varepsilon > 0$, llavors existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ complint que $\forall n \geq n_0$ és $\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k - \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k\right| < \varepsilon$. Ara només cal notar que $\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k - \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k\right| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Sigui $\varepsilon > 0$, triem el $n_0 \in \mathbb{N}$ anterior. Aleshores per a $n, m \geq n_0 + 1$, $m > n$, tenim:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) = \varepsilon_n + \ldots + \varepsilon_{m-1} = \sum_{k=n}^{m-1} \varepsilon_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$$

(b) Demostreu que si $(x_n)_n$ és convergent i $\lim\limits_n x_n = x \in X$, llavors per a tot $n \geq 0$, és:

$$d(x, x_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k$$

Sol. Raonant com a l'apartat (a), tenim que $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ és:

$$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon_n + \ldots + \varepsilon_{m-1} = \sum_{k=n}^{m-1} \varepsilon_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k$$

Passant al límit $m \to \infty$, obtenim $d(x, x_n) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k$.[4]

2.8. Siguin $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ dues successions a un espai mètric (X, d). Demostreu que:

(a) Si $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ són de Cauchy, aleshores la successió de $\mathbb{R}$ $(d(a_n, b_n))_n$ té límit.

Sol. Serà suficient veure que $(d(a_n, b_n))_n$ és de Cauchy. Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores:
(1) $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_1$ és $d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$.
(2) $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_2$ és $d(b_n, b_m) < \varepsilon/2$.
Llavors per a $n, m \geq n_0 := \max(n_1, n_2)$, tenim:

$$d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m) \leq d(a_n, a_m) + d(a_m, b_m) - d(a_m, b_m) \leq d(a_n, a_m) + d(b_n, b_m) < \varepsilon$$

On hem utilitzat la desigualtat triangular. Invertint els papers de n i m, obtenim:

$$d(a_m, b_m) - d(a_n, b_n) \leq d(a_m, a_n) + d(b_m, b_n) < \varepsilon$$

En definitiva, $|d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m)| < \varepsilon$.

(b) Si $(a_n)_n$ és de Cauchy i $\lim\limits_n d(a_n, b_n) = 0$, aleshores $(b_n)_n$ és de Cauchy.

Sol. Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores:
(1) $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_1$ és $d(a_n, a_m) < \varepsilon/3$.
(2) $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_2$ és $d(a_n, b_n) < \varepsilon/3$.
Llavors per a $n, m \geq n_0 := \max(n_1, n_2)$, tenim:

$$d(b_n, b_m) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, a_m) + d(a_m, b_m) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

(c) Si $(a_n)_n$ és de Cauchy i $\lim\limits_n d(a_n, b_n) = 0$, aleshores $(b_n)_n$ convergeix cap a $l \in X$ si, i només si, $(a_n)_n$ convergeix cap a l.

Sol. Notem que, per l'apartat (b), $(b_n)_n$ és de Cauchy. Això ens diu que problema té una simetria que permet demostrar només una implicació i invertir els papers de $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ per obtenir el recíproc. Provarem, doncs, només la implicació d'esquerra a dreta.
És suficient observar que $\forall n \in \mathbb{N}$ és $0 \leq d(a_n, l) \leq d(a_n, b_n) + d(b_n, l)$ i aplicar la Regla del Sandwich.

[4] S'hauria de veure abans que $(d(x_m, x_n))_m \xrightarrow{m} d(x, x_n)$. Això es dedueix de $-d(x, x_m) \leq d(x, x_n) - d(x_m, x_n) \leq d(x, x_m)$, on hem utilitzat la desigualtat triangular dues vegades.

2.9. Demostreu que $E = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : 0 < \inf_{x\in[0,1]} f(x) \leq \sup_{x\in[0,1]} f(x) < 1\}$ és obert a $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$.

Sol. Sigui $g \in E$ i $a := \inf_{x\in[0,1]} g(x)$, $b := \sup_{x\in[0,1]} g(x)$. Triem $\delta := \min(a, 1-b)/2$. Llavors donada $f \in B(g,\delta)$, és $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| < \delta$, per tant, $|f(x)-g(x)| < \delta \;\; \forall x \in [0,1]$. Desenvolupant:

$$0 < a - \delta \leq g(x) - \delta < f(x) < g(x) + \delta \leq b + \delta < 1, \quad \forall x \in [0,1]$$

Per tant, $0 < \inf_{x\in[0,1]} f(x) \leq \sup_{x\in[0,1]} f(x) < 1$, és a dir, $f \in E$.
Això demostra que $B(g,\delta) \subseteq E$, com volíem.

2.10. Sigui $A \subseteq \mathbb{R}$ obert. Demostreu que per a cada $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, els conjunts $x + A := \{x + y : y \in A\}$ i $x \cdot A := \{x \cdot y : y \in A\}$ són oberts.

Sol. Definim aplicacions $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\phi_x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ per les assignacions

$$\varphi_x(y) := y - x \qquad \phi_x(y) := y/x$$

Notem que són funcions contínues als seus respectius dominis. Observem també que $\varphi_x^{-1}(A) = x + A$ i $\phi_x^{-1}(A) = x \cdot A$. Això demostra que $x + A$ és obert a $\mathbb{R}$ i $x \cdot A$ és obert a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Però com que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ és obert a $\mathbb{R}$, es té que $x \cdot A$ també és obert a $\mathbb{R}$.

2.11. Un espai mètric (X,d) es diu *ultramètric* si per a tots $x, y, z \in X$ és

$$d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))$$

Sigui (X,d) un espai ultramètric. Proveu:

(a) Tota bola oberta de (X,d) és un conjunt tancat.

Sol. Sigui $B(x,M)$ una bola oberta de (X,d) $(x \in X, M > 0)$. Volem veure que $B(x,M)^{\mathsf{C}} = \{y \in X : d(x,y) \geq M\}$ és obert. Sigui $y \in B(x,M)^{\mathsf{C}}$, afirmem que $B(y,M) \subseteq B(x,M)^{\mathsf{C}}$. En efecte, si $p \in B(y,M)$, llavors $d(p,y) < M \leq d(x,y)$, per tant:

$$M \leq d(x,y) \leq \max\{d(x,p), d(p,y)\} \overset{d(p,y)<M}{=} d(x,p) \Rightarrow p \in B(x,M)^{\mathsf{C}}$$

(b) Una successió $(a_n)_n$ és de Cauchy en (X,d) si, i només si, $\lim_{n\to+\infty} d(a_n, a_{n+1}) = 0$.

Sol. La implicació d'esquerra a dreta és evident. Per l'altra, suposem que $(a_n)_n$ és una successió de (X,d) que compleix $d(a_n,a_{n+1}) \longrightarrow 0$. Sigui $\varepsilon > 0$ aleshores existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $d(a_n, a_{n+1}) < \varepsilon$.
Per a $n, m \geq n_0$, $m > n$, tenim

$$\begin{aligned} d(a_n,a_m) &\leq \max\{d(a_n,a_{n+1}), d(a_{n+1},a_m)\} \leq \\ &\leq \max\{d(a_n,a_{n+1}), d(a_{n+1},a_{n+2}), d(a_{n+2},a_m)\} \leq \ldots \leq \\ &\leq \max\{d(a_n,a_{n+1}), \ldots, d(a_{m-1},a_m)\} < \varepsilon \end{aligned}$$

2.12. Es tracta de provar una generalització del Teorema dels Intervals Encaixats (cf.Teorema 1.6.2). Sigui (X,d) un espai mètric complet per successions. Per a un conjunt no buit $E \subseteq X$ definim el seu diàmetre com $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{x,y\in E} d(x,y)$. Suposem que $(E_n)_n$ és una successió de subconjunts tancats i no buits de X que compleix $E_{n+1} \subseteq E_n$ per a cada $n \geq 1$ i $\operatorname{diam}(E_n) \xrightarrow{n} 0$.

(a) Suposem que $x_n \in E_n$ per a $n \geq 1$. Demostreu que la successió $(x_n)_n$ és de Cauchy.

Sol. Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores com que $\operatorname{diam}(E_n) \xrightarrow{n} 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $\sup\limits_{x,y\in E_n} d(x,y) < \varepsilon$. Llavors per a $n, m \geq n_0$, $m \geq n$, tenim $E_m \subseteq E_n$. Per tant, $x_n, x_m \in E_n$, amb la qual cosa $d(x_n,x_m) \leq \sup\limits_{x,y\in E_n} d(x,y) < \varepsilon$.

(b) Demostreu que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \neq \varnothing$. (Pista: Utilitzeu una successió de l'apartat (a) i el Lema 2.3.10)

Sol. L'axioma de l'elecció garanteix l'existència d'una successió $(x_n)_n$ complint l'apartat (a). Com que (X,d) és complet per successions, podem definir $x \in X$ com el límit de $(x_n)_n$.
Sigui $n \geq 1$ un natural, aleshores $x_m \in E_n$ $\forall m \geq n$. Com que E_n és tancat, pel Lema 2.3.10, tenim $x \in E_n$, i.e. $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$. En particular, la intersecció és no buida.

(c) Demostreu que existeix $x \in X$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\}$.

Sol. Només falta veure que x és l'únic element de la intersecció. Suposem que $y \in E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Llavors

$$0 \leq d(x,y) \leq \sup_{a,b\in E_n} d(a,b) = \operatorname{diam}(E_n) \xrightarrow{n} 0$$

Per tant, $d(x,y) = 0$ i $x = y$.

2.13. Sigui $X = (0,+\infty)$. Definim

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \end{aligned}$$

(a) Demostreu que (X,d) és un espai mètric.

Sol.

(1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$

(2) $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = d(y,x)$

(3) $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| + \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right| = d(x,z) + d(z,y)$

(b) Proveu que la successió $(n)_n$ és de Cauchy a (X, d). És convergent a (X, d)?

Sol. Sigui $\varepsilon > 0$. Com que $(1/n)_n \xrightarrow{n} 0$ a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $|1/n| < \varepsilon/2$. Per a $n, m \geq n_0$, tenim:

$$d(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Veiem que $(n)_n$ no és convergent a (X, d). Suposem que $n \xrightarrow{n,d} x_0 \in (0, +\infty)$. Aleshores $d(n, x_0) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{x_0}\right| \xrightarrow{n} 0$. Però $(1/n)_n$ convergeix cap a 0 a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Per la unicitat del límit, seria $1/x_0 = 0$, per tant, $x_0 \notin (0, +\infty)$, contradicció.

(c) És la successió $(1/n)_n$ de Cauchy a (X, d)?

Sol. No. Per a $\varepsilon = 1$ i $m = n+1$, és $d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = |n - m| = |n - n - 1| = 1 \geq \varepsilon$.

(d) Demostreu que si $(a_n)_n \subseteq X$, llavors $(a_n)_n$ convergeix a X si, i només si, convergeix a (X, d'), on $d'(x,y) := |x - y|$ i, en tal cas, els límits coincideixen.

Sol.

$$a_n \xrightarrow{n,d} a \in X \Leftrightarrow d(a_n, a) \xrightarrow{n,|\cdot|} 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| \xrightarrow{n,|\cdot|} 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_n} \xrightarrow{n,|\cdot|} \frac{1}{a} \Leftrightarrow a_n \xrightarrow{n,|\cdot|} a \Leftrightarrow a_n \xrightarrow{n,d'} a \in X$$

2.14. Sigui $B \subseteq \mathbb{R}$ un tancat i $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacte. Demostreu que el conjunt $B + K := \{x + y : x \in B, y \in K\}$ és tancat.

Sol. Sigui $(a_n)_n \subseteq B + K$ tal que $\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}$. Pel Lema 2.3.10, serà suficient veure que $a \in B + K$.
Per l'axioma de l'elecció[5], podem posar $a_n = x_n + y_n$ amb $x_n \in B$ i $y_n \in K$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pel Teorema 2.3.14, existeix una parcial $(y_{n_k})_k \vdash (y_n)_n$ convergent a un cert $y \in K$. Notem que podem escriure $x_n = (x_n + y_n) - y_n = a_n - y_n$. Pel Corol·lari 1.4.11(c), obtenim que $(x_n)_n$ convergeix cap a $a - y$. Com que B és tancat, serà $a - y \in B$.
Finalment, $a = (a - y) + y$, on $a - y \in B$ i $y \in K$, com volíem veure.

2.15. Sigui (E, d) un espai mètric.

(a) Demostreu que si $(x_n)_n \subseteq E$ convergeix cap a $x \in E$, llavors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\} \cup \{x\} \subseteq E$ és compacte.

Sol. Sigui $\{A_i\}_{i\in I}$ un recobriment per oberts de $K := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\} \cup \{x\}$. Com que $x \in K \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, tenim que existeix $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$. A més a més, com que A_{i_0} és obert, existeix $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq A_{i_0}$.

[5]Dient $A_n := \{(x,y) \in B \times K : x + y = a_n\}$ i prenent una aplicació $\varphi : \mathbb{N} \to B \times K$ tal que $\varphi(n) \in A_n$

El fet que $(x_n)_n \xrightarrow{n} x$ implica que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $d(x, x_n) < \delta$, i.e. $x_n \in B(x, \delta) \subseteq A_{i_0}$.
D'altra banda, per a $x_0, \ldots, x_{n_0-1} \in K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ hi ha $k_0, \ldots, k_{n_0-1} \in I$ (poden ser repetits) tals que $x_i \in A_{k_i}$, $i = 0, \ldots, n_0 - 1$.
En definitiva, posant $J := \{k_0, \ldots, k_{n_0-1}, i_0\}$, és clar que $J \subseteq I$ és finit i $K \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$.

(b) Siguin (E', d') un espai mètric i $f : E \longrightarrow E'$ una aplicació que compleix que per a tot compacte $K \subseteq E$, és $f_{|K}$ contínua a K. Demostreu que f és contínua a E.

Sol. Sigui $p \in E$. Si p és un punt aïllat, llavors f és trivialment contínua a p. Suposem, doncs, que p és un punt d'acumulació. Aleshores p és un punt límit i per la Proposició 2.1.12 serà suficient veure que $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$. Però pel Teorema 2.1.9, tindrem prou veient que si $(x_n)_n \subseteq E \setminus \{p\}$ convergeix cap a p, aleshores $(f(x_n))_n$ convergeix cap a $f(p)$.
Per l'apartat (a), el conjunt $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} \cup \{p\}$ és compacte i, per hipòtesi, $f_{|K}$ és contínua. Però observem que $(x_n)_n \subseteq K \setminus \{p\}$ i $p \in K'$. Tornant a aplicar el Teorema 2.1.9 i la Proposició 2.1.12 (ara en sentit invers), obtenim que

$$f(x_n) = f_{|K}(x_n) \xrightarrow{n} f_{|K}(p) = f(p)$$

2.16. Proveu el següent cas particular del Teorema 2.3.14. Sigui $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacte i $(x_n)_n \subseteq K$, aleshores existeixen un element $x \in K$ i una parcial $(x_{n_k})_k \vdash (x_n)_n$ tals que $\lim_k x_{n_k} = x$.

Sol. Sigui $[a, b]$ tal que $K \subseteq [a, b]$. Podem distingir dos casos:

(1) $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ finit. Aleshores existeix $x \in K$ pel qual hi ha infinits $m \in \mathbb{N}$ complint $x_m = x$. La construcció de la parcial es pot fer, doncs, a l'estil de l'exercici **1.13.**. Definim una successió $(n_k)_k$ estrictament creixent de forma recurrent:

$$n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} : x_n = x\} \qquad n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} : x_n = x, n > n_k\}$$

Aleshores és evident que $(x_{n_k})_k$ convergeix cap a x.

(2) $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ infinit. Definim:

$$I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$$

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n], & \text{si } [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ és infinit} \\ [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}], & \text{si } [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ és finit} \end{cases}$$

La successió $(I_n)_n$ és d'intervals tancats, encaixats i compleix $\mathrm{long}(I_n) \xrightarrow{n} 0$. Pel Teorema dels intervals encaixats (cf. 1.6.2), existeix $x \in [a, b]$ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$.
Construïm una successió de naturals $(n_k)_k$ estrictament creixent de forma recurrent:

$$n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_0\} \qquad n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_{k+1}, n > n_k\}$$

Notem que $x_{n_k} \in I_k$, per tant, $-(b_k - a_k) \leq x_{n_k} - x \leq b_k - a_k$. Per la Regla del Sandwich, serà $\lim_k x_{n_k} = x$. Finalment, com que $(x_{n_k})_k \subseteq K$ i K és tancat, ha de ser $x \in K$.

2.17. Sigui $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua i acotada a $(0,1)$. Definim la funció $g : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per $g(x) = x(1-x)f(x)$. Demostreu que g és uniformement contínua a $(0,1)$.

Sol. Com que f és acotada, tenim $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$. Definim $\bar{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ per:

$$\bar{g}(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \{0,1\} \\ g(x), & \text{si } x \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Notem que $\bar{g}$ és contínua a $[0,1]$. Pel Teorema 2.4.5, $\bar{g}$ serà uniformement contínua i, per tant, $g = \bar{g}_{|(0,1)}$ també ho serà.

2.18. Demostreu que:

(a) $f(x) = x^2$ no és uniformement contínua a $\mathbb{R}$.

Sol. Aplicarem la Proposició 2.4.4 amb $x_n = \sqrt{n}$ i $y_n = \sqrt{n+1}$. Tenim

$$|y_n - x_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n} 0,$$

però

$$|f(y_n) - f(x_n)| = n + 1 - n = 1 \nrightarrow 0$$

(b) $f(x) = 1/x$ és uniformement contínua a $[1, +\infty)$ i no ho és a $(0,1)$.

Sol. Sigui $\varepsilon > 0$. Triem $\delta := \varepsilon$. Llavors per a $x, y \in [1, +\infty)$ complint $|x-y| < \delta = \varepsilon$, tenim:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{|xy|} \overset{xy\geq 1}{\leq} |x-y| < \varepsilon$$

Per veure que no ho és a $(0,1)$, és suficient triar $x_n := \dfrac{1}{n}$, $y_n := \dfrac{1}{n+1}$ $(n \geq 2)$ i aplicar la Proposició 2.4.4:

$$|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n(n+1)}\right| \xrightarrow{n} 0, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| = |(-1)| = 1 \nrightarrow 0$$

(c) $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ és uniformement contínua a $\mathbb{R}$.

Sol. Sigui $\varepsilon > 0$. Triem $\delta := \varepsilon$. Llavors per a $x, y \in \mathbb{R}$ complint $|x-y| < \delta = \varepsilon$, tenim:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| = \frac{|x+y||x-y|}{(1+y^2)(1+xr)} \\ &\leq \left(\frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{|y|}{(1+x^2)(1+y^2)}\right)|x-y| \overset{(*)}{\leq} |x-y| < \varepsilon \end{aligned}$$

On a $(*)$ hem utilitzat que $\dfrac{|t|}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, ja que $t^2 - 2|t| + 1 = (|t|-1)^2 \geq 0$.

2.19. Sigui $f(x) = \sin x^2$, per a $x \in \mathbb{R}$. Estudieu la continuïtat uniforme de f a $\mathbb{R}$.

Sol. Definim $x_n := \sqrt{2\pi n}$ i $y_n := \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$. Tenim:

$$|x_n - y_n| = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2\pi n} = \frac{\pi/2}{\sqrt{2\pi n + \pi/2} + \sqrt{2\pi n}} \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{2\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow{n} 0$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\sin(2\pi n + \pi/2) - \sin(2\pi n)| = 1 - 0 = 1$$

Per tant, la Proposició 2.4.4 ens afirma que f no convergeix uniformement a $\mathbb{R}$.

2.20. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + x^2} + \dfrac{y}{1 + y^2}$. Estudieu la continuïtat uniforme de f a $\mathbb{R}^2$.

Sol. Siguin $\varepsilon > 0$ i $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$, aleshores:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(a, b)| &= \left|\frac{x}{1 + x^2} + \frac{y}{1 + y^2} - \frac{a}{1 + a^2} - \frac{b}{1 + b^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{x}{1 + x^2} - \frac{a}{1 + a^2}\right| + \left|\frac{y}{1 + y^2} - \frac{b}{1 + b^2}\right| \qquad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{1 + x^2} - \frac{a}{1 + a^2}\right| &= \left|\frac{x(1 + a^2) - a(1 + x^2)}{(1 + x^2)(1 + a^2)}\right| = \frac{|(x - a)(1 - ax)|}{(1 + x^2)(1 + a^2)} \\ &\leq \left(\frac{1}{(1 + x^2)(1 + a^2)} + \frac{|ax|}{(1 + x^2)(1 + a^2)}\right)|x - a| \leq 2|x - a| \end{aligned}$$

On a l'última desigualtat hem utilitzat que $|ax| \leq \dfrac{a^2 + x^2}{2}$ i, per tant, $\dfrac{|ax|}{(1 + x^2)(1 + a^2)} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{(1 + x^2)(1 + a^2)} + \dfrac{x^2}{(1 + x^2)(1 + a^2)}\right) \leq 1$.
Tornant a $(*)$, observem que és suficient prendre $\delta := \dfrac{\varepsilon}{4}$.

2.21. Sigui $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció uniformement contínua a $[0, +\infty)$ i $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció Riemann integrable a $[0, 1]$. Demostreu que la funció

$$F(x) = \int_0^1 f(x + t)g(t)dt$$

és uniformement contínua a $[0, +\infty)$.

Sol. Si $g = 0$, el resultat és immediat, perquè $F = 0$. Suposem que $g \neq 0$ i definim $M := \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| > 0$. Sigui $\varepsilon > 0$. Com que f és uniformement contínua a $[0, +\infty)$, tenim que existeix $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in [0, +\infty)$, $|x - y| < \delta$ és $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Per a $x, y \in [0, +\infty)$, $|x - y| < \delta$ tenim:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_0^1 (f(x+t) - f(y+t))g(t)dt \right| \leq \int_0^1 |f(x+t) - f(y+t)| \cdot |g(t)| dt$$
$$\leq \sup_{t \in [0,1]} (|f(x+t) - f(y+t)| \cdot |g(t)|) \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{M} \left(\sup_{t \in [0,1]} |g(t)| \right) = \varepsilon$$

On a $(*)$ hem utilitzat que $|(x+t)-(y+t)| = |x-y| < \delta$ i, per tant, $|f(x+t)-f(y+t)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

2.22. Sigui $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostreu que la funció

$$\begin{aligned} \phi = d(\cdot, F) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, F) := \inf\{||x - y|| : y \in F\} \end{aligned}$$

és contínua a $\mathbb{R}^n$.

Sol. Demostrarem que ϕ és uniformement contínua a F. Sigui $\varepsilon > 0$, volem veure que existeix $\delta > 0$ tal que $\forall p, q \in \mathbb{R}^n$, $||p - q|| < \delta$ és

$$|d(p, F) - d(q, F)| = \left| \inf_{x \in F} ||p - x|| - \inf_{y \in F} ||q - y|| \right| < \varepsilon$$

Observem que $\forall x \in F$ és $||p - x|| \leq ||p - q|| + ||q - x||$. Posant un ínfim a cada banda, tenim, per l'exercici **1.6.**(c), $d(p, F) \leq ||p - q|| + d(q, F)$.
Per tant, $d(p, F) - d(q, F) \leq ||p - q||$ i, invertint els papers de p i q: $d(q, F) - d(p, F) \leq ||p - q||$. En definitiva, tenim $|d(p, F) - d(q, F)| \leq ||p - q||$, d'on deduïm que és suficient triar $\delta := \varepsilon$.

(a) Sigui $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt compacte. Demostreu que la funció $d(\cdot, K)$ és uniformement contínua.

Sol. Ja ho hem demostrat per qualsevol subconjunt de $\mathbb{R}^n$.

(b) Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua i sigui $\delta > 0$. Definim $K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq \delta\}$. Demostreu que f és uniformement contínua a K_δ.

Sol. Serà suficient veure que K_δ és compacte, i.e., tancat i acotat.
Notem que $\phi^{-1}([0, \delta]) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \geq \phi(x) = d(x, F) \leq \delta\} = K_\delta$. Com que ϕ és contínua a $\mathbb{R}^n$ i $[0, \delta]$ és tancat, deduïm que K_δ és tancat.
Veiem ara que K_δ és acotat. Observem primer que K és acotat (per ser compacte), és a dir, existeix $M > 0$ tal que $||y|| \leq M$ $\forall y \in K$. Sigui $x \in K_\delta$, llavors $d(x, K) = \inf_{y \in K} ||x - y|| \leq \delta$ i podem prendre $y \in K$ tal que $d(x, y) = ||x - y|| < \delta + 1$. Aleshores

$$||x|| \leq ||x - y|| + ||y|| < (\delta + 1) + M > 0,$$

com volíem veure.

2.23. Sigui $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval no trivial complint que totes les funcions contínues a I són uniformement contínues a I.

(a) Demostreu que I és tancat.

Sol. Si I no fos tancat, llavors seria de la forma $(a,b]$, $[a,b)$ o bé (a,b) amb $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. En el primer i segon cas, és suficient prendre la funció $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$. Per un raonament anàleg al de l'exercici **2.18.**(b) tindríem que f no seria uniformement contínua a $(a,b]$ ni a $(a,b]$.
D'altra banda, pel segon cas es pot escollir $f(x) = \dfrac{1}{b-x}$ i, pel mateix raonament, es tindria que f no seria uniformement contínua a $[a,b)$.
Però en qualsevol cas, f és contínua, d'on deduïm la contradicció que volíem.

(b) Demostreu que I és acotat.

Sol. Si I no fos acotat, llavors seria de la forma $[a,+\infty)$, $(-\infty,a]$ o bé $\mathbb{R}$. En qualsevol cas, definim $f(x) = x^2$ (que és contínua) i, fent un raonament anàleg al de l'exercici **2.18.**(a), tindrem que f no és uniformement contínua a $\mathbb{R}$, ni a $[a,+\infty)$, ni a $(-\infty,a]$. Tornem a obtenir una contradicció.

2.24. Sigui $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació.

(a) Sigui $\delta > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Per a cada $x \geq 0$ amb $n\delta \leq x < (N+1)\delta$, comproveu que

$$|f(x) - f(0)| \leq \sum_{k=1}^{N} |f(k\delta) - f((k-1)\delta)| + |f(x) - f(N\delta)|$$

Sol. Per la desigualtat triangular:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \left|(f(x) - f(N\delta)) + \sum_{k=1}^{N} f(k\delta) - f((k-1)\delta)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} |f(k\delta) - f((k-1)\delta)| + |f(x) - f(N\delta)| \end{aligned}$$

(b) Demostreu que si f és uniformement contínua, llavors existeixen $A, B > 0$ tals que $|f(x)| \leq A + Bx$ per a tot $x \in [0,+\infty)$.

Sol. Com que f és uniformement contínua a $[0,+\infty)$, per a $\varepsilon := 1$ existeix $\mu > 0$ tal que

$$\forall x, y \in [0,+\infty),\ |x-y| < \mu \text{ és } |f(x) - f(y)| < \varepsilon = 1 \qquad (1)$$

Triem $\delta := \dfrac{\mu}{2}$, fixem $x \in [0,+\infty)$ i posem $N := \left\lfloor \dfrac{x}{\delta} \right\rfloor$. Aleshores és $N\delta \leq x < (N+1)\delta$.
A més a més, per a $k = 1, \ldots, N$ és:

$$|k\delta - (k-1)\delta| = \delta < \mu; \qquad |x - N\delta| < (N+1)\delta - N\delta = \delta < \mu \qquad (2)$$

Per l'apartat (a), tenim:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(0)| &\leq \sum_{k=1}^{N}|f(k\delta)-f((k-1)\delta)|+|f(x)-f(N\delta)| \\ &\overset{(2),(1)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{N}\varepsilon\right)+\varepsilon=(N+1)\varepsilon \overset{\varepsilon=1}{\leq} \frac{x}{\delta}+1\end{aligned}$$

Finalment, només cal observar que $|f(x)| \leq |f(x)-f(0)|+|f(0)| \leq \frac{1}{\delta}x+1+|f(0)|$. Triant $A := 1+|f(0)|$ i $B := 1/\delta$ ja hem acabat.[6]

(c) Deduïu que un polinomi P és uniformement continu a $[0,+\infty)$ si, i només si, $\deg P \leq 1$.

Sol. Si P és uniformement continu a $[0,+\infty)$, aleshores existeixen $A, B > 0$ tals que $|p(x)| \leq A + Bx$ $\forall x \in [0,+\infty)$. En particular, el grau de P no pot ser major que 1. Recíprocament, si $\deg P \leq 1$, podem posar $P(x) = A + Bx$. Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores per a $x, y \in [0,+\infty)$ és:

$$|p(x)-p(y)| = |A+Bx-A-By| = |B|\cdot|x-y|$$

Per tant, tenim prou triant $\delta := \dfrac{\varepsilon}{|B|}$.

2.25. Siguin (E,d) un espai mètric, $f : E \longrightarrow E$ una funció uniformement contínua i $(x_n)_n \subseteq E$ una successió de Cauchy. Demostreu que $(f(x_n))_n \subseteq E$ és també de Cauchy.

Sol. Sigui $\varepsilon > 0$. Per hipòtesi:

(1) f uniformement contínua $\Rightarrow \exists\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in E$, $d(x,y) < \delta$ és $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

(2) $(x_n)_n$ de Cauchy $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$ és $d(x_n, x_m) < \delta$

Per tant, per a $n, m \geq n_0$ serà $d(x_n, x_m) < \delta$ (per (2)) i $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ (per (1)).

2.26. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suposem que existeixen els límits $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ i són finits. Demostreu que f és uniformement contínua a $\mathbb{R}$.

Sol. Recordem les definicions de límits quan la variable tendeix cap a infinit. Direm que la funció f té límit $l \in \mathbb{R}$ quan $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$) si

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0 \text{ tal que } \forall x > M \text{ (resp. } x < -M) \text{ és } |f(x) - l| < \varepsilon$$

En aquest cas, escriurem $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$).
Suposem, doncs, que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores:

(a) $\exists M_1 > 1$ tal que $\forall x < -M_1$ és $|f(x) - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

[6] Cal notar, però, que això funciona precisament perquè l'elecció de δ no depèn de x.

(b) $\exists M_2 > 1$ tal que $\forall x > M_2$ és $|f(x) - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

(c) f és uniformement contínua al compacte $[-M_1 - 1, M_2 + 1]$: $\exists \delta' > 0$ tal que $\forall x, y \in [-M_1 - 1, M_2 + 1]$, $|x - y| < \delta'$ és $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Llavors per a $x, y \in \mathbb{R}$, $y < x$, $|x - y| < \delta := \min(1, \delta')$ podem distingir casos:

(1) $y < x < -M_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - a| + |f(y) - a| \overset{(a)}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

(2) $y < -M_1 \leq x \leq M_2 \Rightarrow y > x - \delta \geq x - 1 \geq -M_1 - 1$. Per tant, $x, y \in [-M_1 - 1, M_2 + 1]$ i, per (c), tenim $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(3) $-M_1 \leq y < x \leq M_2 \overset{(c)}{\Rightarrow} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(4) $-M_1 \leq y \leq M_2 < x \Rightarrow x < y + \delta \leq y + 1 \leq M_2 + 1$. Per tant, $x, y \in [-M_1 - 1, M_2 + 1]$ i, per (c), tenim $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(5) $M_2 < y < x \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - b| + |f(y) - b| \overset{(b)}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

En qualsevol cas, és $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

2.27. Siguin $(X, d), (X', d')$ espais mètrics, $f : X \longrightarrow X'$ una funció uniformement contínua. Proveu que si $\varnothing \neq A, B \subseteq X$ compleixen que $d(A, B) = 0$, llavors $d(f(A), f(B)) = 0$. Recordeu que $d(A, B) = \inf\limits_{a \in A, b \in B} d(a, b)$.

Sol. Per hipòtesi, tenim:

(1) f uniformement contínua $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $\forall a, b \in X, d(a, b) < \delta$ és $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$

(2) $d(A, B) = 0 \Rightarrow \forall \delta > 0\ \exists a \in A, b \in B$ tals que $d(a, b) < \delta$

El nostre objectiu és veure que $d(f(A), f(B)) = \inf\limits_{a \in A, b \in B} d(f(a), f(b)) = 0$. Notem que 0 és cota inferior de $\{d(f(a), f(b)) : a \in A, b \in B\}$. Per tant, només falta veure que 0 és la major de totes les cotes inferiors.
En efecte, si $\varepsilon > 0$, (1) ens proporciona un $\delta > 0$ i, aplicant-lo a (2), obtenim $a \in A, b \in B$ complint $d(a, b) < \delta$. Per (1), serà $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$, com volíem.

2.28. Un subconjunt C d'un espai mètric (X, d) es diu que és totalment acotat en X quan, per a cada $r > 0$, podem recobrir C per un nombre finit de boles obertes de radi r.

(a) Siguin (E, d) i (F, d') espais mètrics i $f : E \longrightarrow F$ una funció uniformement contínua. Demostreu que si $A \subseteq E$ és totalment acotat a E, llavors $f(A) \subseteq F$ és també totalment acotat a F.

Sol. Sigui $\varepsilon > 0$ volem veure que existeixen $B(q_1, \varepsilon), \ldots, B(q_n, \varepsilon) \subseteq F$ tals que $f(A) \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(q_k, \varepsilon)$. Com que f és uniformement contínua, existeix $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in E$, $d(x, y) < \delta$ és $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Com que A és totalment acotat, per aquest $\delta > 0$ tenim que existeixen $B(p_1, \delta), \ldots,$ $B(p_m, \delta) \subseteq E$ tals que $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{m} B(p_k, \delta)$.
Prendrem $n := m$ i $q_k := f(p_k)$. Aleshores per a $f(x) \in f(A), x \in A$, existeix

$k = 1, \ldots, n$ tal que $x \in B(p_k, \delta)$, i.e. $d(x, p_k) < \delta$, per tant, $d'(f(x), f(p_k)) < \varepsilon$ i és $f(x) \in B(f(p_k), \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f(p_i), \varepsilon)$, com volíem veure.

(b) Demostreu que a $\mathbb{R}$ amb la distància euclidiana, un subconjunt $A \subseteq \mathbb{R}$ és totalment acotat si, i només si, A és acotat.

Sol. $\Leftarrow$: Existeix $a > 0$ tal que $A \subseteq (-a, a)$. Sigui $r > 0$, definim $p_k := -a + kr$ de de $k = 0$ fins a $k = n$ amb $-a + nr \geq a$. Definint ara $B_k := B(p_k, r)$, tenim $A \subseteq (-a, a) \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} B_k$.

$\Rightarrow$: Provem primer que la unió finita d'acotats és acotada. Si A i B són acotats, aleshores $A \subseteq B(p, M)$ i $B \subseteq B(q, N)$ amb $p, q \in E$, $M, N > 0$. Afirmem que $A \cup B \subseteq B(p, d(p, q) + \max\{M, N\})$. En efecte, si $x \in A$ és clar i si $x \in B$, llavors

$$d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p) < d(p, q) + N \leq d(p, q) + \max\{M, N\}$$

Ara bé, per inducció és immediat que si $A_1, \ldots, A_n$ són acotats, aleshores $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ és acotat.
Passem ara a resoldre el problema. Com que A és totalment acotat, per a $r = 1$ tenim $B(p_1, 1), \ldots, B(p_n, 1) \subseteq \mathbb{R}$ recobrint A. Aquestes boles són, evidentment, acotades, per tant, la unió també ho serà. Com que A està inclòs a la unió, tindrem, finalment, que A és acotat.[7]

[7] Notem que per aquesta implicació no és necessari que $(E, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

Capítol 3: Successions i sèries de funcions

3.1. Sigui $f_n : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f_n(x) := \min\{n, x^{-1}\}$.

(a) Demostreu que $(f_n)_n$ convergeix puntualment a la funció $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \frac{1}{x}$.

Sol. Per a $n \in \mathbb{N}$, tenim:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } 0 < x \leq 1/n \\ \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1/n \end{cases}$$

Fixem $x \in (0, +\infty)$. Aleshores per a $n > \dfrac{1}{x}$, tindrem $f_n(x) = 1/x$. Per l'arquimedineïtat, tenim garantida l'existència d'algun $n \in \mathbb{N}$ complint-ho. En definitiva, $\forall x > 0$ és $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1/x = f(x)$.

(b) És la successió uniformement convergent a $[a, +\infty), a > 0$? I a $(0, +\infty)$?

Sol. Com a resposta a la primera pregunta: sí. En efecte, si $\varepsilon > 0$, per l'arquimedianeïtat podem triar $n_0 > 1/a$. Aleshores per a $n \geq n_0$ i $x \in [a, +\infty)$ és $x \geq a > \dfrac{1}{n_0} \geq \dfrac{1}{n}$, per tant:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right| = 0 < \varepsilon$$

Però $(f_n)_n$ no convergeix uniformement en $(0, +\infty)$. Notem que si $(f_n)_n$ convergís uniformement, ho faria al seu límit puntual. Per tant, només cal estudiar la convergència uniforme cap a f.
Podem definir $x_n := \dfrac{1}{n+1}$. Llavors és $f_n(x_n) = \min\{n, n+1\} = n$ i

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = |n - (n+1)| = 1 \nrightarrow 0$$

Ara només cal aplicar la Proposició 3.2.5.

3.2. Sigui $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n 2^n x^2}$$

(a) Estudieu la convergència puntual de $(f_n)_n$.

Sol. Per a $x = 0$, tenim: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
Per a $x \in (0, 1]$, tenim:

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} \sim \frac{2^n x}{n 2^n x^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$$

Per tant, $f_n \xrightarrow{n} 0$ puntualment.

(b) Estudieu la convergència uniforme de $(f_n)_n$.

Sol. $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)$. Podem calcular aquest últim suprem utilitzant els mètodes d'optimització habituals.
Tenim $f_n'(x) = \dfrac{2^n - n2^{2n}x^2}{(1+n2^nx^2)^2}$. Igualant-la a 0, obtenim $x_m = \dfrac{1}{\sqrt{n}2^{n/2}}$. Avaluant f_n a 0, 1 i x_m, observem que el màxim s'assoleix a x_m (almenys per a n suficientment gran). Per tant:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0(x)| = f_n(x_m) = \frac{2^{n/2}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n} +\infty$$

En definitiva, $(f_n)_n$ no convergeix uniformement en $[0,1]$.

3.3. Sigui $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida per $f_n(x) = x^n$.

(a) Calculeu per a $x \in [0,1]$, $f(x) = \lim\limits_n f_n(x)$.

Sol. Si $x = 1$, llavors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$.
Si $x \in [0,1)$, aleshores:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = 0$$

Per tant, $(f_n)_n$ convergeix puntualment a la funció $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida per $f(1) = 1$ i $f(x) = 0$, si $x \in [0,1)$.

(b) Convergeix uniformement la successió $(f_n)_n$ a f en $[0,1]$? I en $[0,\delta)$ per a $0 < \delta < 1$?

Sol. $(f_n)_n$ no convergeix uniformement en $[0,1]$, perquè f no és contínua.
D'altra banda, si $\delta \in (0,1)$, tenim

$$\sup_{x\in[0,\delta]} |f_n(x) - f(x)| = \delta^n \xrightarrow{n} 0,$$

d'on deduïm que $(f_n)_n$ convergeix uniformement a $f = 0$ en $[0,\delta]$.

(c) Si $g_n(x) = f_n(x)(1-x)$, calculeu $g(x) = \lim\limits_n g_n(x)$ per a cada $x \in [0,1]$.

Sol. Si $x = 1$, llavors $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(0) = 0$.
Si $x \in [0,1)$, aleshores:

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n(1-x) = 0$$

Per tant, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ és definida per $g(x) = 0$.

(d) Demostreu que $(g_n)_n$ convergeix uniformement a g en $[0,1]$.

Sol. Utilitzant els mètodes habituals d'optimització , obtenim que g_n té màxim absolut a $x_m = \dfrac{n}{n+1}$. Per tant:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n(x_m) &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1-\frac{n}{n+1}\right)\\ &= \left[\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{n}{-(n+1)}} \left(\frac{1}{n+1}\right) \sim e^{-1}\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n} 0\end{aligned}$$

3.4. Per a $\alpha \in \mathbb{R}$, considerem la successió de funcions $(f_n^\alpha)_n$ definida per:

$$f_n^\alpha(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n, x \in [0,1]$$

(a) Calculeu per a $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n^\alpha(x)$.

Sol. Si $x = 0, 1$, llavors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n^\alpha(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
Si $x \in (0,1)$, aleshores:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n^\alpha(x) = \lim_{n\to+\infty} xn^\alpha(1-x^2)^n = x \cdot \lim_{n\to+\infty} n^\alpha(1-x^2)^n = 0,$$

perquè $1-x^2 \in (0,1)$ i $(a^n)_n$ amb $a > 1$ creix més ràpidament que $(n^\alpha)_n$ $\forall\alpha \in \mathbb{R}$. Per tant, $f_n^\alpha \xrightarrow{n} 0$ per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Demostreu que $(f_n^\alpha)_n$ convergeix uniformement en $[0,1]$ si, i només si, $\alpha < 1/2$.

Sol. Resolent $f_n^{\alpha\prime}(x_m) = 0$, obtenim $x_m = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Avaluant f_n^α en 0,1 i x_m, deduïm que assoleix el seu màxim absolut en x_m. Tenim:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]} |f_n^\alpha(x) - 0(x)| = f_n^\alpha(x_m) &= n^\alpha \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n\\ &= \frac{n^\alpha}{\sqrt{2n+1}} \left[\left(1+\frac{1}{-(2n+1)}\right)^{-(2n+1)}\right]^{\frac{n}{-(2n+1)}} \sim \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} n^{\alpha-1/2}\end{aligned}$$

Aquesta última successió convergeix cap a 0 sempre i quan $\alpha - 1/2 < 0$, d'on deduïm que $(f_n)_n$ convergeix uniformement si, i només si, $\alpha < 1/2$.

(c) Sigui $0 < \rho < 1$. Per a quins valors d'α convergeix uniformement en $[\rho, 1]$ la successió $(f_n^\alpha)_n$?

Sol. Recordem que el màxim de f_n^α en $[0,1]$ s'assoleix a $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. No obstant, a partir d'un cert n serà $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \rho$ i, per tant, el màxim de f_n^α en $[\rho, 1]$ s'haurà d'assolir a ρ o a 1. Avaluant la funció, deduïm que serà a ρ. Tenim

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n^\alpha(x) - 0(x)| = f_n^\alpha(\rho) = n^\alpha \rho(1-\rho^2)^n \xrightarrow{n} 0$$

sense importar el valor de α. O sigui, $(f_n^\alpha)_n$ convergeix uniformement en $[0, \rho]$ $\forall\alpha \in \mathbb{R}$.

3.5. Siguin $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ complint:

(i) Per a tot $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n} f_n(x) = 0$.

(ii) Per a cada $n \geq 1$, la funció f_n és monòtona creixent en $[0,1]$.

(a) Demostreu que $(f_n)_n$ convergeix uniformement a 0 en $[0,1]$.

Sol. Com que f_n és monòtona creixent en $[0,1]$, tenim que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0(x)|$ és $|f_n(0)|$ o bé $|f_n(1)|$. En qualsevol cas, per (i), tenim $|f_n(0)|, |f_n(1)| \xrightarrow{n} 0$, com volíem.

(b) És certa l'afirmació anterior si $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ i es compleixen les mateixes hipòtesis canviant $[0,1]$ per $[0,1)$?

Sol. No. Per exemple, $f_n(x) = x^n$. Si triem $x_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}$ i apliquem la Proposició 3.2.5, deduïm que $(f_n)_n$ no convergeix uniformement en $[0,1)$.

3.6. (a) Donada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, definim

$$g_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

Demostreu que $g_n \xrightarrow{n} f$.

Sol. Siguin $\varepsilon > 0$ i $x \in \mathbb{R}$, aleshores existeix $\delta > 0$ tal que $\forall t \in \mathbb{R}$ complint $|t-x| < \delta$ és $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. A més a més, com que $(1/n)_n \xrightarrow{n} 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $\frac{1}{n} < \delta$. Llavors per a $n \geq n_0$, tenim:

$$\begin{aligned}|g_n(x) - f(x)| &= \frac{n}{2}\left|\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt - \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(x)dt\right| = \frac{n}{2}\left|\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (f(t) - f(x))dt\right| \\ &\leq \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |f(t) - f(x)|dt \overset{(*)}{<} \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varepsilon dt = \frac{n}{2}\varepsilon\frac{2}{n} = \varepsilon\end{aligned}$$

On a $(*)$ hem utilitzat que $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, ja que $t \in \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$ i, per tant, $|t - x| \leq \frac{1}{n} < \delta$.

(b) Si $f(x) = e^x$, demostreu que per a tot $a \in \mathbb{R}$, $g_n \rightrightarrows f$ en $(-\infty, a]$.

Sol.

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(-\infty,a]} |g_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in(-\infty,a]} \frac{n}{2}\left|\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (e^t - e^x)dt\right| = \\ &= \sup_{x\in(-\infty,a]} \frac{n}{2}|e^{x+\frac{1}{n}} - e^{x-\frac{1}{n}} - \frac{2}{n}e^x| = \frac{n}{2}e^a|e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{-1}{n}} - \frac{2}{n}| \xrightarrow{n} 0,\end{aligned}$$

ja que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{1/n} - e^{-1/n} - 2/n}{2/n} = 0$.

3.7. Per a $n \geq 1$ i $f, g \in \mathcal{C}([-n,n])$, definim:

$$d_n(f,g) = \sup_{x\in[-n,n]} |f(x) - g(x)|$$

(a) Demostreu que d_n és una distància en $\mathcal{C}([-n,n])$, però no ho és en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Sol. Comprovem les propietats de la Definició 2.1.1. Siguin $f, g, h \in \mathcal{C}([-n,n])$, llavors:

(1) $d_n(f,g) = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in[-n,n]} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \forall x \in [-n,n] \Leftrightarrow f = g$

(2) $d_n(f,g) = \sup\limits_{x\in[-n,n]} |f(x) - g(x)| = \sup\limits_{x\in[-n,n]} |g(x) - f(x)| = d_n(g,f)$

(3) $d_n(f,g) = \sup\limits_{x\in[-n,n]} |f(x) - g(x)| \leq \sup\limits_{x\in[-n,n]} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) \leq$
$\leq \sup\limits_{x\in[-n,n]} |f(x) - h(x)| + \sup\limits_{x\in[-n,n]} |h(x) - g(x)| = d_n(f,h) + d_n(h,g)$

d_n no és una distància en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, perquè no es compleix la propietat (1). En efecte, podem definir $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-n,n] \\ |x| - n, & \text{si } x \notin [-n,n] \end{cases}$$

i tenim $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $d_n(f_n, 0) = 0$, però $f_n \neq 0$.

(b) Per a $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, definim:

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}$$

(i) Demostreu que d és una distància en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Sol. Notem que tots els termes de la sèrie són positius i $d(f,g) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty$. Per tant, $d(f,g)$ convergeix.
Tornem a comprovar les propietats de la Definició 2.1.1. Siguin $f, g, h \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, llavors:

(1) $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow d_n(f,g) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f = g$ en $[-n,n]$ $\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f = g$ en $\mathbb{R}$

(2) $d(f,g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(g,f)}{1 + d_n(g,f)} = d(g,f)$

(3) Notem que la funció $b(t) := \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ és creixent a $[0, +\infty)$. Per tant:

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,h) + d_n(h,g)}{1 + d_n(f,h) + d_n(h,g)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{d_n(f,h)}{1 + d_n(f,h) + d_n(h,g)} + \frac{d_n(h,g)}{1 + d_n(f,h) + d_n(h,g)} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,h)}{1 + d_n(f,h)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(h,g)}{1 + d_n(h,g)} = d(f,h) + d(h,g) \end{aligned}$$

(ii) Sigui $(f_j)_j$ una successió de funcions de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Demostreu que $f_j \xrightarrow{j} f$ en $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), d)$ si, i només si, $f_j \rightrightarrows f$ en tot compacte $K \subseteq \mathbb{R}$.

Sol. $\Rightarrow$: Serà suficient veure-ho en els compactes de la forma $K_n := [-n, n]$, ja que tot compacte de $\mathbb{R}$ està contingut en algun K_n.
Fixem, doncs, $n \geq 1$, $K_n = [-n, n]$ i $\varepsilon > 0$. Observem que $\varepsilon' := \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$, per tant, existeix $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j \geq j_0$ és $d(f_j, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}\dfrac{d_k(f_j, f)}{1 + d_k(f_j, f)} < \varepsilon'$.
En particular, $\dfrac{1}{2^n}\dfrac{d_n(f_j, f)}{1 + d_n(f_j, f)} < \varepsilon'$, o sigui, $d_n(f_j, f) < 2^n(1 + d_n(f_j, f))\varepsilon' = (1 + d_n(f_j, f))\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Aïllant la distància, obtenim $d_n(f_j, f) < \varepsilon$.
Això demostra que $d_n(f_j, f) = \sup_{x\in[-n,n]} |f_j(x) - f(x)| \xrightarrow{j} 0$. Per tant, $f_j \rightrightarrows f$ en $[-n, n]$, com volíem veure.

$\Leftarrow$: Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ja que la cua de tota sèrie convergent té límit 0 (cf. resolució de l'exercici **2.7.**).
D'altra banda, per a $n = 1, \ldots, n_0$ tenim $f_j \rightrightarrows f$ en $[-n, n]$. Per tant, per a cada $n = 1, \ldots, n_0$ existeix $j_n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j \geq j_n$ és $d_n(f_j, f) < \dfrac{\varepsilon}{n_0}$. Triem $j_0 := \max\{j_1, \ldots, j_n\}$. Aleshores per a $j \geq j_0$ és:

$$\begin{aligned} d(f_j, f) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{d_n(f_j, f)}{1 + d_n(f_j, f)} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n}\frac{d_n(f_j, f)}{1 + d_n(f_j, f)} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{d_n(f_j, f)}{1 + d_n(f_j, f)} \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n_0} d_n(f_j, f) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Això demostra que $d(f_j, f) \xrightarrow{j} 0$, és a dir, $f_j \xrightarrow{j} f$ en $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), d)$.

3.8. Per a $n \in \mathbb{N}$, sigui $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2}$$

(a) Calculeu el límit puntual de la successió $(f_n)_n$.

Sol. Si $x = 0$, llavors $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$.
Si $x \neq 0$, aleshores:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}x^2} = 0$$

Per tant, $f_n \xrightarrow{n} 0$ puntualment.

(b) Estudieu la convergència uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $\mathbb{R}$.

Sol. Tenim $f_n'(x) = \sqrt{n}\dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$, d'on deduïm que f_n creix a $(-\infty, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ i decreix a $[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty)$. Per tant:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \overset{f_n \text{ senar}}{=} \sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$$

Per tant, $(f_n)_n$ no convergeix uniformement en $\mathbb{R}$.

(c) Estudieu la convergència uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $\mathbb{R}\setminus(-a,a)$, $a>0$.

Sol. Si triem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < a$, aleshores per a $n \geq n_0$, tenim:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}\setminus(-a,a)} |f_n(x) - 0(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}\setminus(-a,a)} |f_n(x)| \overset{f_n \text{ senar}}{=} \sup_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) \\ &= f_n(a) = a\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}a^2} \xrightarrow{n} 0\end{aligned}$$

Per tant, $f_n \rightrightarrows 0$ en $\mathbb{R}\setminus(-a,a)$.

(d) Estudieu la convergència puntual de la sèrie $\sum_{n=1}^\infty f_n^3$ en $\mathbb{R}$.

Sol. Si $x=0$, la sèrie convergeix trivialment. Si $x\neq 0$, aleshores, pel 2n criteri de comparació de sèries (cf. Teorema 4.1.5), tenim:

$$\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)^3| = \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}\right|^3 \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|x|^3}\frac{1}{n^{3/2}}$$

On aquesta última convergeix perquè $3/2 > 1$. Com que la convergència absoluta implica la convergència, tenim que $\sum_{n=1}^\infty f_n^3$ convergeix puntualment.

(e) Estudieu la convergència uniforme de la sèrie $\sum_{n=1}^\infty f_n^3$ en $\mathbb{R}$.

Sol. És suficient observar que:

$$\begin{aligned}M_N &:= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=1}^\infty f_n(x)^3 - \sum_{n=1}^{N-1} f_n(x)^3\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=N}^\infty f_n(x)^3\right| \overset{f_n \text{ senar}}{\geq} \sup_{x\in[0,+\infty)} |f_N(x)^3| \\ &= f_N\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^3 = \frac{1}{8} > 0\end{aligned}$$

Per tant, $\lim\limits_{N\to+\infty} M_N \geq \frac{1}{8} > 0$ (en cas que existeixi) i $\sum_{n=1}^\infty f_n^3$ no convergeix uniformement en $\mathbb{R}$.

(f) Estudieu la convergència uniforme de la sèrie $\sum_{n=1}^\infty f_n^3$ en $[a,b]$, on $0<a<b<\infty$.

Sol. Aplicarem el criteri M de Weierstrass (cf. Corol·lari 3.2.10). Per això, serà suficient veure que la sèrie numèrica $\sum\limits_{n=1}^\infty \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x)^3|$ és convergent. Per a $n_0\in\mathbb{N}$

suficientment gran, tindrem $\frac{1}{\sqrt{n}} < a \ \forall n \geq n_0$. Per tant:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)^3| = \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(a)^3 = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{a\sqrt{n}}{1+na^2}\right)^3 \sim \frac{1}{a^3}\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-3/2}$$

On aquesta última convergeix perquè $-3/2 < -1$.

3.9. Estudieu la convergència uniforme de la sèrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{ne^{-nx}}{1+nx}$ en $[1, +\infty)$.

Sol. Diem $f_n(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{1+nx}$. Aleshores $f_n'(x) = -n^2 e^{-nx} \dfrac{2+nx^2}{(1+nx)^2} < 0 \ \forall x \in [1, +\infty)$. Per tant:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[1,+\infty)} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{1+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) e^{-n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

On aquesta última és una sèrie geomètrica de raó $1/e \in (-1, 1)$, en particular, convergent (cf. Lema 4.1.10). Pel 1r criteri de comparació de sèries (cf. Teorema 4.1.4), tenim que la sèrie numèrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{x\in[1,+\infty)} |f_n(x)|$ convergeix. Finalment, pel criteri M de Weierstrass, obtenim que la sèrie de funcions $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{ne^{-nx}}{1+nx}$ convergeix uniformement en $[1, +\infty)$.

3.10. Siguin (E, d), (F, d') espais mètrics i $(f_n)_n$ una successió de funcions (amb $f_n : E \to F$) uniformement convergent en E cap a una funció $f : E \to F$.

(a) Demostreu que si per a tot $n \in \mathbb{N}$, $(f_n)_n$ és uniformement contínua en E, llavors f és uniformement contínua en E.

Sol. Sigui $\varepsilon > 0$. Aleshores:

(1) $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ i $\forall x \in E$ és $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$.

(2) f_{n_0} és uniformement contínua $\Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que $\forall x, y \in E$, $d(x, y) < \delta$ és $d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) < \varepsilon/3$.

Per a aquest mateix $\delta > 0$ i $x, y \in E$ complint $d(x, y) < \delta$, tenim:

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(y)) + d'(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

(b) Demostreu que si $g : F \to \mathbb{R}$ és uniformement contínua en F, llavors $(g \circ f_n)_n$ convergeix uniformement en E cap a una funció $h : E \to \mathbb{R}$.

Sol. Veurem que $g \circ f_n \rightrightarrows h = g \circ f$. Sigui $\varepsilon > 0$, aleshores:

(1) g és uniformement contínua $\Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que $\forall z, t \in F$, $d'(z, t) < \delta$ és $|g(z) - g(t)| < \varepsilon$.

(2) $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ i $\forall x \in E$ és $d'(f_n(x), f(x)) < \delta$.

Per tant, per a $n \geq n_0$ i $x \in E$, tenim $d'(f_n(x), f(x)) < \delta$ (per (2)) i posant $z = f_n(x)$ i $t = f(x)$ a (1), obtenim finalment:

$$|(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| = |g(f_n(x)) - g(f(x))| = |g(z) - g(t)| < \varepsilon$$

3.11. Sigui $\alpha > 0$ i $(f_n)_n$ la successió de funcions definides per

$$f_n(x) = \left(\frac{1+nx}{n+x^2}\right)^\alpha$$

(a) Estudieu la convergència puntual de $(f_n)_n$ en $[0, +\infty)$.

Sol. Posem $h_n(x) = \dfrac{1+nx}{n+x^2}$. Per a $x \geq 0$, tenim:

$$h_n(x) = \frac{1+nx}{n+x^2} = \frac{\frac{1}{n}+x}{1+\frac{x^2}{n}} \xrightarrow{n} x$$

Per tant, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x^\alpha =: f(x)$.

(b) Estudieu la convergència uniforme de $(f_n)_n$ en $[0, 1]$.

Sol. Notem que per a tot $x \in [0, 1]$ és:

$$|h_n(x) - x| = \left|\frac{1-x^3}{n+x^2}\right| \leq \frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}$$

Per tant:

$$0 \leq M_n := \sup_{x\in[0,1]} |h_n(x) - x| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$$

Per la Regla del Sandwich, tindrem $M_n \xrightarrow{n} 0$, és a dir, $(h_n)_n$ convergeix uniformement cap a $h(x) = x$.
Notem que les funcions h_n són contínues a $[0, 1]$, per tant, també són uniformement contínues en aquest interval. A més a més, per a $x \in [0, 1]$ és:

$$0 \leq h_n(x) = \frac{1+nx}{n+x^2} = \frac{\frac{1}{n}+x}{1+\frac{x^2}{n}} \leq 2$$

Per tant, $h_n([0, 1]) \subseteq [0, 2]$ i la funció $g(x) = x^\alpha$ és contínua a $[0, 2]$. En particular, també serà uniformement contínua a $[0, 2]$.
Per l'exercici **3.10.**(b), tindrem que $(g \circ h_n)_n = (f_n)_n$ convergeix uniformement en E cap a $g \circ h = f$.

3.12. Siguin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tals que $a < b$, $c < d$, $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b] \times [c, d]$ i $(x_n)_n \subseteq [a, b]$ una successió convergent.

(a) Per a cada enter $n \geq 1$ considerem la funció $f_n : [c, d] \to \mathbb{R}$ definida per $f_n(t) = f(x_n, t)$. Demostreu que la successió $(f_n)_n$ convergeix uniformement en $[c, d]$.

Sol. Posem $x_0 := \lim\limits_n x_n$. Com que $(x_n)_n \subseteq [a, b]$ i $[a, b]$ és tancat, ha de ser $x_0 \in [a, b]$. A més a més, notem que $[a, b] \times [c, d]$ és compacte, per tant, f és uniformement contínua. Per tot això, tenim:

(1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $\forall (x, y), (z, t) \in [a, b] \times [c, d]$ complint $d((x, y), (z, t)) < \delta$ és $|f(x, y) - f(z, t)| < \varepsilon$.

(2) $\forall \delta > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $|x_n - x_0| < \delta$.

Provarem que $(f_n)_n$ convergeix uniformement a $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ definida per $h(t) = f(x_0, t)$.
Sigui $\varepsilon > 0$, prenem el $\delta > 0$ donat per (1) i el $n_0 \in \mathbb{N}$ donat per (2). Aleshores per a $n \geq n_0$ és $|x_n - x_0| < \delta$. En particular, $d((x_n, t), (x_0, t)) = |x_n - x_0| < \delta \ \forall t \in [c,d]$. Per tant:

$$|f_n(t) - h(t)| = |f(x_n, t) - f(x_0, t)| \overset{(1)}{<} \varepsilon$$

(b) Per a cada enter $n \geq 1 $ considerem la funció $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida per

$$g_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{t}\log(1 + t/n), & t > 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Demostreu que la successió $(g_n)_n$ convergeix uniformement en $[0,1]$, però no ho fa en $[0,\infty)$.

Sol. Definim la funció $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ per

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{xt}\log(1 + xt), & xt > 0 \\ 1, & xt = 0 \end{cases}$$

Aquesta és contínua perquè la funció $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida per

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\log(1 + t), & t > 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

és contínua.
Notem que $(1/n)_n \subseteq [0,1]$ i $g_n(t) = G\left(\frac{1}{n}, t\right)$. Per (a), tenim $g_n \rightrightarrows G(0,\cdot) = 1$.

Triem $t_n := n$. Aleshores:

$$|g_n(t_n) - g(t_n)| = |g_n(n) - 1| = |\log 2 - 1| \not\to 0$$

Per la Proposició 3.2.5, tenim que $(g_n)_n$ no convergeix uniformement en $[0,+\infty)$.

3.13. Siguin $(X, d_x), (Y, d_y)$ espais mètrics, $E \subseteq X$, $f, f_n : E \longrightarrow Y$ tals que $f_n \rightrightarrows f$. Sigui també $x \in E$ i suposem que f és contínua a x. Aleshores $\forall (x_n)_n \subseteq E$ tal que $(x_n)_n \xrightarrow{n} x$, és $(f_n(x_n))_n \xrightarrow{n} f(x)$.

Sol. Per hipòtesi:

(1) $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$ i $\forall y \in E$ és $d_y(f_n(y), f(y)) < \varepsilon/2$

(2) f contínua a $x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que si $d_x(x,y) < \delta$ amb $y \in E$, aleshores $d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$.

(3) $(x_n)_n \xrightarrow{n} x \Rightarrow \forall \delta > 0 \ \exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_2$ és $d_x(x_n, x) < \delta$.

Sigui $\varepsilon > 0$, triem el $n_1 \in \mathbb{N}$ donat per (1), el $\delta > 0$ donat per (2) i el $n_2 \in \mathbb{N}$ donat per (3). Aleshores per a $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, tenim:

$$d_y(f_n(x_n), f(x)) \leq d_y(f_n(x_n), f(x_n)) + d_y(f(x_n), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3.14. Calculeu
$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2-1}$$

Sol. Posem $f_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2-1}$. Notem que $\displaystyle\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f_n(x)|=\sup_{x\in[-\pi,\pi]}\frac{|\cos nx|}{n^2-1}=\frac{1}{n^2-1}$ i que la sèrie numèrica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ convergeix. Per tant, pel criteri M de Weierstrass, deduïm que la sèrie de funcions $\sum_{n=2}^{\infty}f_n$ convergeix uniformement.
Pel Teorema 3.3.3, tenim:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}f_n(x)&=\sum_{n=2}^{\infty}f_n(0)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}\right)=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

3.15. Sigui $f_n:[-1,1]:\to\mathbb{R}$, $n\geq 1$ la successió de funcions definida per $f_n(x)=e^{\frac{x^2}{n}}$.

(a) Estudieu la convergència puntual i uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $[-1,1]$.

Sol. Per a $x\in[-1,1]$, tenim
$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{x^2}{n}}=e^0=1$$

Per tant, $(f_n)_n$ convergeix puntualment a $f(x)=1$.
Notem que $|f_n(x)-f(x)|=|e^{\frac{x^2}{n}}-1|=e^{\frac{x^2}{n}}-1=:g_n(x)$.
Derivant: $g_n'(x)=\frac{2x}{n}e^{\frac{x^2}{n}}\Rightarrow g_n$ decreix a $[-1,0]$ i creix a $[0,1]$. Per tant:
$$\sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[-1,1]}g_n(x)=g_n(1)=g_n(-1)=e^{1/n}-1\xrightarrow{n}0$$

O sigui, $(f_n)_n$ convergeix uniformement a $f=1$.

(b) Calculeu
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}e^{\frac{x^2}{n}}\,dx$$

Sol. Pel Teorema 3.5.7, tenim:
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}e^{\frac{x^2}{n}}\,dx=\int_{-1}^{1}\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{x^2}{n}}\,dx=\int_{-1}^{1}dx=2$$

3.16. Sigui $g_n:[1,3]:\to\mathbb{R}$, $n\geq 1$ la successió de funcions definida per $f_n(x)=\dfrac{nx^2+3}{x^3+nx}$.

(a) Estudieu la convergència puntual i uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $[1,3]$.

Sol. Per a $x\in[1,3]$, tenim
$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{nx^2+3}{x^3+nx}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2+\frac{3}{n}}{x+\frac{x^3}{n}}=\frac{x^2}{x}=x$$

Per tant, $(f_n)_n$ convergeix puntualment a $f(x) := x$.
Per a $n > 27$, tenim:

$$\sup_{x\in[1,3]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,3]} \left|\frac{nx^2+3}{x^3+nx} - x\right| = \sup_{x\in[1,3]} \left|\frac{3-x^4}{x^3-nx}\right|$$
$$\overset{(*)}{\leq} \frac{3+3^4}{n-27} \xrightarrow{n} 0$$

On a $(*)$ hem utilitzat que $nx - x^3 \geq n - 27$.
En definitiva, $(f_n)_n$ convergeix uniformement a f.

(b) Calculeu
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^3 \frac{nx^2+3}{x^3+nx} dx$$

Sol. Pel Teorema 3.5.7, tenim:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^3 f_n(x)dx = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 xdx = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

3.17. Sigui $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funció contínua i sigui $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida per $g_n(x) = f(x^n)$. Demostreu que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = f(0)$$

Sol. Fixem $\varepsilon > 0$. Tenim

$$A_n := \left|\int_0^1 g_n(x)dx - f(0)\right| = \left|\int_0^1 (f(x^n) - f(0))dx\right| \leq \int_0^1 |f(x^n) - f(0)|dx$$
$$= \int_0^\rho |f(x^n) - f(0)|dx + \int_\rho^1 |f(x^n) - f(0)|dx$$

El nostre objectiu és demostrar que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $A_n < \varepsilon$. Per fer-ho, triarem un bon $\rho \in (0,1)$ i acotarem per $\frac{\varepsilon}{2}$ els anteriors dos sumands, que anomenarem B_n i C_n, respectivament.

Com que $[0,1]$ és compacte, $f([0,1])$ també ho és i, en particular, f és acotada. Posem $M := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \in \mathbb{R}$. Llavors $|f(x^n) - f(0)| \leq |f(x^n)| + |f(0)| \leq 2M$ $\forall x \in [0,1]$.
Per tant, $C_n \leq 2M(1-\rho)$. Triant $\max\left(0, 1 - \dfrac{\varepsilon}{4M}\right) < \rho < 1$, tenim $C_n < \varepsilon/2$, com volíem.

D'altra banda, com que $[0,1]$ és compacte, f és uniformement contínua. Per tant, existeix $\delta > 0$ tal que $\forall z, t \in [0,1]$ complint $|z - t| < \delta$ és $|f(z) - f(t)| < \varepsilon/2$.
Com que $(\rho^n)_n \xrightarrow{n} 0$, tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ és $\rho^n < \delta$. Aleshores per a $x \in [0,\rho]$ i $n \geq n_0$, tenim:

$$0 \leq x^n \leq \rho^n < \delta \Rightarrow |x^n - 0| < \delta \Rightarrow |f(x^n) - f(0)| < \varepsilon/2$$

Per tant, $B_n < \dfrac{\varepsilon}{2}\rho < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
En definitiva, per a $n \geq n_0$, és $A_n \leq B_n + C_n < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, com volíem veure.

3.18. Demostreu que per a cada $h > 0$, la sèrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ convergeix uniformement en $[h, +\infty)$. Si $f(x)$ denota la suma, calculeu, per a cada $h < a < b$, el valor de $\int_a^b f(x)dx$.

Sol. Posem $f_n(x) = ne^{-nx}$. Aleshores $f_n'(x) = -n^2e^{-nx} < 0$, per tant, $\sup\limits_{x\in[h,+\infty)} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[h,+\infty)} f_n(x) = f_n(h) = ne^{-nh}$ i tenim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[h,+\infty)} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nh}$$

La convergència d'aquesta sèrie la podem justificar pel 2n criteri de comparació. En efecte, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{ne^{-nh}}{1/n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{e^{nh}} = 0$ i la sèrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ convergeix.
En definitiva, pel criteri M de Weierstrass, deduïm que la sèrie de funcions $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ convergeix uniformement.

Pel Corol·lari 3.5.8, tenim:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b ne^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(e^{-an} - e^{-bn})$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{e^{-a}}{1-e^{-a}} - \frac{e^{-b}}{1-e^{-b}} = \frac{1}{e^a - 1} - \frac{1}{e^b - 1}$$

On a $(*)$ hem utilitzat la suma de sèries geomètriques (cf. Lema 4.1.10) tenint en compte que $e^{-a}, e^{-b} \in (-1, 1)$.

Capítol 4: Sèries de potències

4.1. Estudieu la convergència i calculeu la suma en el corresponent domini de convergència de les següents potències:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

Sol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, amb $a_n = 1$.

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n} \sqrt[n]{1}} = \frac{1}{1} = 1$$

A més a més, per a $x = -1, 1$, la sèrie divergeix. Per tant:

(1) Per a $r \in (0,1)$, la sèrie convergeix uniformement i absolutament en $[-r, r]$.

(2) Per a $|x| \geq 1$, la sèrie divergeix.

(3) El domini de convergència és $(-1, 1)$.

Pel Lema 4.1.10, si $x \in (-1,1)$, llavors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Sol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, amb $a_n = 1/n$.

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Per a $x = 1$, la sèrie és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, que divergeix.

Per a $x = -1$, la sèrie és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$, que convergeix pel criteri de Leibniz (cf. Corol·lari 3.6.2). Per tant:

(1) Per a $r \in (0,1)$, la sèrie convergeix uniformement en $[-1, r]$ (Teorema d'Abel)

(2) Per a $|x| \geq 1, x \neq -1$, la sèrie divergeix.

(3) El domini de convergència és $[-1, 1)$.

Anomenem f a la funció suma puntual. Tenim que f és derivable a $(-1,1)$ i

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Notem que f' és contínua a $(-1, 1)$. Per la Regla de Barrow, tenim:

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x) \qquad \text{per a } x \in (-1,1)$$

Finalment, pel Corol·lari 4.2.9 f és contínua a -1 i, per tant:

$$f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} -\log(1-x) = -\log 2$$

En definitiva, $f(x) = -\log(1-x)$, per a $x \in [-1, 1)$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$

Sol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, amb $a_n = (n+1)$. Notem que

$$\lim_n \sqrt[n]{n+1} = \lim_n (n+1)^{\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n}} = 1,$$

o sigui:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_n \sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Observem que per a $x = -1, 1$, la sèrie divergeix. Per tant:

(1) Per a $r \in (0,1)$, la sèrie convergeix uniformement i absolutament en $[-r, r]$.
(2) Per a $|x| \geq 1$, la sèrie divergeix.
(3) El domini de convergència és $(-1, 1)$.

Anomenem f a la funció suma puntual i fixem $x \in (-1,1)$. Com que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n$ convergeix uniformement en $[0, x]$ (o $[x, 0]$), tenim:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (n+1)t^n dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x} \end{aligned}$$

Finalment, com que f és contínua, pel Teorema Fonamental de Càlcul, tenim:

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} \qquad \text{per a } x \in (-1,1)$$

4.2. Estudieu la convergència i calculeu la suma en el corresponent domini de convergència de la següent sèrie de potències:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

Sol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n-1)} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^n$, amb $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$, $n \geq 2$. Notem que

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n(n-1)}} = \lim_n \frac{1}{n^{1/n}(n-1)^{\frac{1}{n-1}\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1,$$

o sigui:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1$$

Observem que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

Per tant, per a $x = -1, 1$ la sèrie és absolutament convergent i, pel Teorema d'Abel, tenim que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ convergeix uniformement i absolutament en $[-1, 1]$.

Anomenem f a la funció suma puntual de la sèrie. f és derivable a $(-1,1)$ i $f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \overset{\mathbf{4.1.}(b)}{=} -\log(1-x)$.

Com que f' és contínua a $(-1,1)$, per a $x \in (-1,1)$, podem aplicar la Regla de Barrow:

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = -\int_0^x \log(1-t)dt = (1-x)\log(1-x) + x$$

Pel Corol·lari 4.2.9, tenim que f és contínua a $[-1,1]$, per tant:

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(1-x)\log(1-x) + x = 1 + \lim_{x\to 1} \frac{\log(1-x)}{\frac{1}{1-x}} \overset{\text{Hôpital}}{=} 1$$

$$f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(1-x)\log(1-x) + x = 2\log 2 - 1$$

En definitiva, $f(x) = \begin{cases} (1-x)\log(1-x) + x, & x \in [-1,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

4.3. (a) Estudieu la convergència puntual i uniforme de la següent sèrie de potències:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

Estudieu la convergència en els extrems del domini de convergència.

Sol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n3^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, amb $a_n = \frac{n+1}{n3^n}$.

Notem que

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\frac{1}{3^n}} = \lim_n \frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n}}}{n^{\frac{1}{n}}} \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

o sigui:

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1/3} = 3$$

A més a més, observem que la sèrie divergeix per a $x = -3, 3$. Per tant:

(1) Per a $r \in (0,3)$, la sèrie convergeix uniformement i absolutament en $[-r,r]$.

(2) Per a $|x| \geq 3$, la sèrie divergeix.

(3) El domini de convergència és $(-3,3)$.

(b) Trobeu la suma de la sèrie.

Sol. Anomenem f a la funció suma puntual de la sèrie. Aleshores, per a $x \in (-3,3)$, és:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/3)^n}{n} \overset{(*)}{=} \frac{x}{3-x} - \log\left(1 - \frac{x}{3}\right)$$

On a $(*)$ hem utilitzat els apartats (a) i (b) de l'exercici **4.1.**

(c) Quin és el valor de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n9^n}$?

Sol.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n9^n} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1/3}{3-1/3} - \log\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{8} - \log\left(\frac{8}{9}\right)$$

4.4. (a) Demostreu que el radi de convergència de la següent sèrie de potències és 1:
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

Sol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m x^m$, amb
$$a_m = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)}, & \text{si } m \text{ és senar, amb } m = 2n+1 \\ 0, & \text{si } m \text{ és parell} \end{cases}$$

Notem que
$$\limsup_m \sqrt[m]{|a_m|} = \lim_n \frac{1}{(2n+1)^{\frac{1}{2n+1}}(2n-1)^{\frac{1}{2n-1}\frac{2n-1}{2n+1}}} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1,$$

o sigui:
$$R = \frac{1}{\limsup\limits_m \sqrt[m]{|a_m|}} = 1$$

(b) Demostreu que la suma de la sèrie és la funció $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida per
$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x$$

Sol. Per a $x = -1, 1$, tenim
$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m x^m| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} < +\infty$$

Per tant, pel Teorema d'Abel, tenim que la sèrie de potències $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m x^m$ convergeix uniformement i absolutament en $[-1,1]$.

Anomenem f a la funció suma puntual. Tenim que f és derivable a $(-1,1)$ i
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x \cdot g(x) \qquad (*)$$

La sèrie de potències $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ té també radi de convergència $R' = 1$, per tant, g és derivable a $(-1,1)$ i
$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n \overset{-x^2\in(-1,1)}{=} -\frac{1}{1+x^2}$$

Com que g' és contínua a $(-1,1)$, per la Regla de Barrow, tenim:

$$g(x) = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)dt = \int_0^x \frac{-1}{1+t^2}dt = -\arctan x \quad \text{per a } x \in (-1,1)$$

Substituint a $(*)$, obtenim $f'(x) = -x\arctan x$, que és contínua. Finalment, per a $x \in (-1,1)$:

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x (-t\arctan t)dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x$$

Pel Corol·lari 4.2.9, f és contínua a $[-1,1]$. Per tant:

$$f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = \frac{-1}{2} - \arctan(-1) = \frac{-1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2} - \arctan(1) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

En definitiva, $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x \quad \forall x \in [-1,1]$.

(c) Demostreu que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

Sol.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = f(1) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

4.5. (a) Estudieu la convergència de la sèrie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{nx^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

Estudieu la convergència en els extrems del domini de convergència.

Sol.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{nx^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n,$$

amb $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)}$. De forma semblant als exercicis anteriors, es veu que $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ i, per tant, $R = 1$. Per a $x = 1$ la sèrie convergeix pel criteri de Leibniz.
Per a $x = -1$, la sèrie és de l'ordre de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ i divergeix. Pel Teorema d'Abel, tindrem que $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ convergeix uniformement en $[-r,1]$ $\forall r \in (0,1)$.

(b) Si f denota la seva suma, demostreu que per a cada $|x|<1$ és

$$x^2\int_0^x \frac{1}{t}f'(t)dt = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

Sol. f és derivable a $(-1,1)$ i

$$f'(t) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}t^{n-1}$$

Per tant, si $t\neq 0$, tenim:

$$\frac{f'(t)}{t} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}t^{n-2} =: g(t)$$

Notem, però, que g pot estar definida i ser contínua a $(-1,1)$ (el seu radi de convergència és 1), per tant, la discontinuïtat de $f'(t)/t$ a $t=0$ és evitable i podem pensar la integral impròpia $\int_0^x \frac{f'(t)}{t}dt$ com una de Riemann igual a $G(x) := \int_0^x g(t)dt$.

Per a $x\in(-1,1)$, tenim que la sèrie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}t^{n-2}$ convergeix uniformement en $[0,x]$ (o $[x,0]$). Per tant, pel Corol·lari 3.5.8:

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt = \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{n-1}{n+1}t^{n-2}dt = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n-1}$$

En definitiva, per a $x\in(-1,1)$, és:

$$\begin{aligned}x^2G(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}\\ &\overset{(*)}{=} -\left[-\log(x+1) - \frac{(-x)^2}{2} - \frac{-x}{1}\right] = \log(x+1) + \frac{x^2}{2} - x\end{aligned}$$

On a $(*)$ hem utilitzat que l'exercici **4.1.**(b).

4.6. Estudieu la convergència i calculeu la suma en el corresponent domini de convergència de la sèrie de potències:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4n+1}$$

Calculeu el valor de $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{4n}(4n+1)}$.

Sol. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{4n+1} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}a_mx^m$, amb $a_m = \begin{cases}0, & m\notin 4\mathbb{Z}\\ \frac{1}{m+1}, & m\in 4\mathbb{Z}\end{cases}$

Notem que

$$\limsup_m \sqrt[m]{|a_m|} = \lim_n \sqrt[4n]{\frac{1}{4n+1}} = \lim_n \frac{1}{(4n+1)^{\frac{1}{4n+1}\frac{4n+1}{4n}}} = 1$$

Per tant, $R=1$. A més a més, si $|x|=1$, la sèrie és de l'ordre de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n}$, que divergeix. Es compleix, doncs:

(1) Per a $r \in (0,1)$, la sèrie convergeix uniformement i absolutament en $[-r,r]$.

(2) Per a $|x| \geq 1$, la sèrie divergeix.

(3) El domini de convergència és $(-1,1)$.

Anomenem f a la funció suma puntual. Aleshores:

$$g(x) := xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

Aquesta sèrie de potències té el mateix radi de convergència que l'anterior i, per tant, és derivable a $(-1,1)$ i

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

Com que g' és contínua, podem aplicar la Regla de Barrow. Sigui $x \in (-1,1)$, aleshores:

$$g(x) = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)dt = -\frac{1}{4}\log(1-x) + \frac{1}{4}\log(1+x) + \frac{1}{2}\arctan x$$

Per tant, per a $x \in (-1,1)$, tenim:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4x}[-\log(1-x) + \log(1+x) + 2\arctan x], & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Per acabar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4n}(4n+1)} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[-\log\frac{1}{2} + \log\frac{3}{2} + 2\arctan\frac{1}{2}\right] = \log\sqrt{3} + \arctan\frac{1}{2}$$

4.7. Sigui $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-n-3}{n+1} x^n$.

(a) Estudieu la convergència puntual i uniforme de la sèrie.

Sol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-n-3}{n+1} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, amb $a_n = \dfrac{n^2-n-3}{n+1}$. Tenim:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{e^{\frac{1}{n}\log(n^2-n-3)}}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n}}} = \frac{e^0}{1} = 1$$

Per tant, el radi de convergència és $R = 1$. Notem que la sèrie divergeix per a $x = -1, 1$. En definitiva:

(1) Per a $r \in (0,1)$, la sèrie convergeix uniformement i absolutament en $[-r,r]$.

(2) Per a $|x| \geq 1$, la sèrie divergeix.

(3) El domini de convergència és $(-1,1)$.

(b) Calculeu la suma de la sèrie de potències en el seu domini.

Sol. Si $x \in (-1,1), x \neq 0$, llavors:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n-3}{n+1} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1-n-2}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} - 3\frac{x}{1-x} + \frac{1}{x}\log(1-x) + 1
\end{aligned}$$

On a $(*)$ hem utilitzat tots els apartats de l'exercici **4.1.**. Per tant:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n-3}{n+1} x^n = \begin{cases} \dfrac{2x-x^2}{(1-x)^2} - 3\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1}{x}\log(1-x) + 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

4.8. Considerem la sèrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos^{n+1} x}{n+1}$.

(a) Estudieu la convergència puntual en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Sol. Per a $x = 0$, és $\cos x = 1$ i la sèrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ divergeix. Però per a $x \in (0, \pi/2]$, és $\cos x \in [0,1)$ i, com que la sèrie de potències $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^{n+1}}{n+1}$ té radi de convergència 1 (cf. exercici **4.1.**(b)), tenim que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos^{n+1} x}{n+1}$ convergeix.

(b) Estudieu la convergència uniforme en $\left[a, \frac{\pi}{2}\right], a > 0$.

Sol. Aplicarem el criteri M de Weierstrass[8]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in [a, \pi/2]} \left| \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{n+1} a}{n+1} \overset{a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]}{<} +\infty$$

(c) Calculeu, en els punts on la sèrie és convergent, el valor de la suma.

Sol. Per l'exercici **4.1.**(b), tenim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n} = -\log(1-\cos x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \cos x \neq 1$$

[8] També surt fàcilment utilitzant, de nou, l'exercici **4.1.**(b).

Bibliografia

[Ort] ORTEGA ARAMBURU, JOAQUÍN M., *Introducció a l'anàlisi matemàtica.* 2a ed. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona. Servei de publicacions, 2002.

[Rud] RUDIN, W., *Principios de análisis matemático* 3ª ed. México: McGraw-Hill, 1980.

[Ross] KENNETH A. ROSS, *Elementary Analysis* 2nd edition. New York: Springer, 2013.

[Pes] PESTANA, D. [ET AL.], *Curso práctico de cáculo y precálculo* 2ª edición. Barcelona: Ariel, 2000.

[Roy] ROYDEN, H.L., *Real Analysis* 3rd edition. New York: Macmillan, 1988.